

עלון האיגוד הישראלי לשיטות חישוביות במכניקה

מספר 37

ספטמבר 2017

עורך: אלעד פריאל, המחלקה להנדסת מכונות, המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון, באר-שבע 84100, טל. 6475884 (08), דואר אלקטרוני: eladp@sce.ac.il

חברי ועד אישח"מ: מיכאל אנגלמן, רמי בן-צבי, פנחס בר-יוסף, דן גבעולי, יצחק הררי, עמיאל הרשגה, יונתן טל (אחראי האתר), זהר יוסיבאש (נשיא), סלבה קרילוב (מזכיר-גזבר)

איש-קשר עם ECCOMAS: מישל ברקובייר

ועדת ביקורת: מחמוד ג'בארין ומרדכי סנטו

אתר אישח"מ (IACMM) באינטרנט: <http://www.iacmm.org.il>

רישום לחברות באגוד ופרטים נוספים: באתר האגוד הנ"ל, או פנו למזכיר-גזבר, פרופ' סלבה קרילוב, טל. 054-7746664, דואר אלקטרוני: krylov@tauex.tau.ac.il

מ-"שולחן העורך":



שלום לכל חברי האיגוד, מכיוון שהעלון הנוכחי גדוש במיוחד בדיווחים ועדכונים דברי העורך הפעם יהיו קצרים מהרגיל.

ראשית אני רוצה להודות לדר' יורי פלדמן מהמחלקה להנדסת מכונות באוניברסיטת בן-גוריון שבנגב על כתיבת המאמר המעניין אשר מופיע בעלון זה ועוסק בשיטת ה Immersed boundary לבעיות זרימה תרמיות. שנית, אני רוצה לנצל במה זו על מנת לברך את כל הקוראים (חברי האיגוד ואת שאינם עדיין חברי האיגוד) בברכת שנה חדשה טובה ומוצלחת הן בפן המחקרי מקצועי והן בפן האישי.

ISCM42 – פרופ' Natarajan Sukumar מרצה.

במהלך יום העיון חולקו תעודות לזוכים בפרס ההרצאה המצטיינת בימי העיון ה 40 וה 41 (מר ליאור מדינה ומר תומר לוין פרס ראשון ושני בהתאמה).



ISCM42 – מר ליאור מדינה מקבל תעודה על זכיה בהרצאה מצטיינת של ימי העיון ה 40 וה 41 מנשיא האיגוד פרופ' זהר יוסיבאש.

כמו תמיד, אשמח לשמוע מכל אחד ואחת מחברי האיגוד בנוגע לתכנים אשר הם היו מעוניינים לראות מופיעים בעלון. אנא פנו אלי במייל בכל שאלה או הצעה.

אתם מוזמנים לבקר באתר האיגוד בו תמצאו מידע על האיגוד ועל מכאניקה חישובית בארץ ובעולם <http://www.iacmm.org.il>. באתר תוכלו לצרף עצמכם (ללא תשלום) לרשימת התפוצה האלקטרונית, להירשם כחברים באגוד או לחדש את חברותכם. טופס רישום לאיגוד ניתן למצוא ב <http://www.iacmm.org.il/member>

עדכונים מיום העיון הקודם:

יום העיון ה-42 נערך ב-30 במרץ בפקולטה להנדסת מכונות בטכניון. המארגנים המקומיים היו פרופ' פנחס בר יוסף ופרופ' מחמוד ג'בארין. המרצה האורח היה Prof. Natarajan Sukumar מהמחלקה להנדסה אזרחית וסביבתית ב UC Davis ארה"ב אשר נתן הרצאה מרתקת בנושא Maximum-entropy in mesh free methods in computational mechanics.

ומאפשרות יישום ישיר של תנאי שפה עבור שדה מהירות וטמפרטורה. יחד עם זאת המורכבות ההולכת וגדלה של תצורות הגופים מהווה אתגר ליעילות ויציבות של השיטות המסורתיות המבוססות על רשתות קונפורמיות.

הגישה האלטרנטיבית לשימוש ברשתות קונפורמיות היא שיטת immersed boundary אשר הוצגה לראשונה על-ידי פסקין [1] לסימולציית זרימת הדם בשסתום מיטראלי של הלב. השיטה הפכה להיות פופולרית מאוד ומהווה בסיס למחקר המתפתח בעקביות במהלך 3 עשורים אחרונים. אחד היתרונות הבסיסיים של השיטת immersed boundary היא יכולתה להתאים לכל פתרון קיים של משוואות Navier-Stokes (NS) אשר פותח במקור ללא יכולת לסמלץ זרימה סביב גופים מוטבעים. פותרנים כאלה פותחו בדרך כלל עבור רשתות רגולריות והם מאופיינים על ידי יעילות ויציבות. כך ששיטת ה immersed boundary אינה מהווה שיטה בלבד, אלא ניתן לראות אותה כפילוסופיה של הטמעת אילוצים קינמטיים על שפת הגופים המוטבעים תוך כדי ניצול מרבי של יתרונות השיטות המסורתיות.

אכיפה מדויקת של האילוצים הקינמטיים מהווה מרכיב קריטי עבור כל שיטת immersed boundary. בין כל האפשרויות הקיימות ליישום השיטה, המחקר הנוכחי מתמקד בגישת direct forcing כלומר, בגישה בה ערכי המהירות והטמפרטורה הרצויים נאכפים ישירות על שפת הגוף המוטבע ללא צורך בתהליך דינאמי כלשהו. גישת direct forcing אשר נוסחה לראשונה על ידי Mohd-Yosof [2] הפכה להיות פופולרית מאוד עם השנים הודות לפשטותה ויציבותה. בגישת direct forcing ניתן לחשב את הכוחות הלגרנג'יים הפועלים על הזורם כתוצאה מהימצאות הגוף המוטבע באופן מפורש או בלתי מפורש.

חישוב מפורש של הכוחות הלגרנג'יים אינו דורש בפועל שום שינוי בפתרון משוואות NS פרט לצורך בהפעלה כפולה של הפתרון המקורי בכל צעד זמן: פעם ראשונה ללא התחשבות בקיומו של הגוף המוטבע ופעם שניה תוך כדי התחשבות בו במונחים של מקורות כוח ידועים הנכנסים לאגף ימין של משוואות NS (ראה מקור [2] לפירוט נוסף). הודות לפשטות היישום הגישה המפורשת הפכה להיות פופולרית מאוד (ראה מאמר סקירה של מיטל ולאכארינו [3]) ואף הורחבה לאחרונה לזרימות טרמיות [4-7].

למרות היתרונות הברורים קיימות שתי מגבלות עיקריות לחישוב מפורש של הכוחות הלגרנג'יים. המגבלה הראשונה מיוחסת לקיומה של זליגה מסית קטנה דרך השפה של הגוף המוטבע. המגבלה השנייה מיוחסת לאופן נקודתי של חישוב הכוחות הלגרנג'יים. על המגבלה הראשונה ניתן להתגבר על-ידי הקטנת צעד הזמן, אולם המגבלה השנייה יכולה להקטין באופן משמעותי את דיוקה של האנליזה כי היא פוגעת באופיין האליפטי של משוואות NS. בפרט הדבר בעל משמעות מכרעת בזרימות טרמיות בנפחים סגורים המאופיינות על ידי גדלים נמוכים ובינוניים של מספר ריילי, Re העומדים במוקד של המחקר הנוכחי.

על המגבלות של הגישה המפורשת ניתן להתגבר על-ידי שימוש בצימוד בלתי מפורש מוחלט בין הכוחות הלגרנג'יים לבין רכיבי שדה המהירות. הכוחות הלגרנג'יים הנכנסים

בנוסף, הוענקה תעודה לתזת הדוקטורט המצטיינת לשנת 2016 בתחום המכניקה החישובית לדר' אלכסנדר קליימן אשר ביצע את מחקרו בהנחייתו של פרופ' עודד גוטליב מהפקולטה להנ' מכונות בטכניון.



ISC42 – דר' קליימן מקבל תעודה על תזת דוקטורט מצטיינת מנשיא האיגוד פרופ' זהר יוסיבאש.

ברכות גם למר חנן עמר שהרצאתו נבחרה להרצאה המצטיינת של יום העיון ה 42.

כאן גם המקום להודות לפנל השופטים ביום העיון ה 42 שכלל את פרופ' יצחק הררי, פרופ' סלבה קרילוב ודר' עמיאל הרשגה. ההחלטה על הזוכה בפרס המקום הראשון להרצאה המצטיינת בימי העיון ה 42 וה 43 תתקבל לאחר קיום יום העיון ה 43.

ISC43

יום העיון ה-43 יתקיים ב-19 באוקטובר 2017 בבית הספר להנדסה מכנית באוניברסיטת תל אביב. (המארגנים הם פרופ' יצחק הררי ופרופ' סלבה קרילוב). המרצה המוזמן הוא Prof. Manfred Bischoff, Institute for structural Mech., Stuttgart University, Germany.

פרטים נוספים ניתן למצוא באתר האיגוד ובהודעות לתפוצה.

שיטת Immersed Boundary בלתי מפורשת למחיצה לסימולציית זרימות טרמיות בנפחים סגורים

יורי פלדמן

הפקולטה להנדסה, המחלקה להנדסת מכונות, אוניברסיטת בן גוריון.

* כתובת אימייל לתגובות: yurifeld@bgu.ac.il

הקדמה

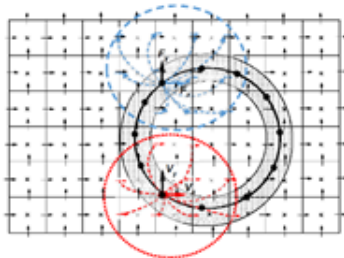
מאמר זה מציג אלגוריתם חדשני לסימולציות זרימות טרמיות מסביב לגופים בעלי גיאומטריה שרירותית בנפחים סגורים באמצעות שיטת immersed boundary. ניבוי מדויק של מאפייני שדה הזרימה התלת ממדי מסביב לגופים מוטבעים בעלי גיאומטריה שרירותית הוא קריטי ביישומים מדעים והנדסיים רבים. לצורך כך נפוץ שימוש ברשתות קונפורמיות התואמות במדויק את גיאומטריה הגוף המוטבע

למשוואות NS באופן בלתי מפורש (בצורה של כופלי לגרנג') ביחד עם משוואות נוספות (המגדירות אילוצים קינמטיים) מגדירים מערכת מורחבת. הפתרון של המערכת מניב בו זמנית מאפייני שדה הזרימה וערכים של כופלי לגרנג' המבטיחים קיומם של תנאי אי-חלקה על שפת הגוף המוטבע. הגישה של צימוד מוחלט הוצגה לראשונה על ידי גלובינסקי [8] עבור זרימות דו-ממדיות. לאחר מכן השיטה הורחבה לסימולציית זרימת חלקיקים [9,10] וגם עברה שילוב עם projection method. באמצעות פתרון משוואת פואסון מורחבת [11] השיטה מאפשרת אכיפה בו זמנית של אילוצים קינמטיים ומציאת שדה הלחצים המבטיחים אי-דחיסות של הזורם.

שיטת immersed boundary

השיטה מיושמת לסימולציית זרימה בנוכחות גופים בעלי שפה לא רגולרית. השפה של הגוף מוגדרת על ידי אוסף של נקודות לגרנג'יות אשר מיקומם לא בהכרח מתלכד עם מיקומו של הרשת האווילרית כמתואר בצירור 1. הדיוק המרבי של השיטה מובטח על ידי שמירה על מרחקים קרובים בין נקודות לגרנג'יות של הגוף Δl לבין המימד האופייני של תא הרשת האווילרית ΔX . ההשפעה של הגוף המוטבע על הזורם מתבטא על-ידי הכנסת צפיפות של כוח f וצפיפות של שטף החום q אשר אינם ידועים ומהווים נעלמים נוספים בבעיה.

בשלב הבא אנו מגדירים שני אופרטורים צמודים באופן הבא:



צירור 1: התיאור הסכמתי של עקרונות הבסיסיים של שיטת immersed boundary

$$R(F^k(X^k), Q^k(X^k)) = \int_S (F^k(X^k), Q^k(X^k)) \cdot \delta(x_i - X^k) dV_S^k, \quad (4a)$$

$$I(u(x_i), \theta(x_i)) = \int_{\Omega} (u(x_i), \theta(x_i)) \cdot \delta(X^k - x_i) dV_{\Omega_i}, \quad (4b)$$

כאשר אופרטור רגולריזציה, R מעביר מידע מהנקודות הלגרנג'יות לרשת האווילרית ואופרטור אינטרפולציה I מבצע אינטרפולציה של השדות המהירות והטמפרטורה מהרשת האווילרית אל הנקודות הלגרנג'יות על שפת הגוף המוטבע. כאן S מסמל את כל התאים השייכים לשפת הגוף המוטבע, Ω מסמלת את כל התאים של הרשת האווילרית הנמצאות בקרבתה של השפת הגוף, dV_S^k מתייחס לנפח וירטואלי המקיף את הנקודה הלגרנג'ית k , ו- dV_{Ω_i} מתייחס לנפח התא של רשת האווילרית. שני האופרטורים R ו- I מתבוססים על אותה פונקציה Dirac [14] המוגדרת בצורה דיסקרטית על-ידי משוואה (5). כאן Δr מתייחס לרוחב התא בכיוון r .

$$d(r) = \begin{cases} \frac{1}{6\Delta r} \left[5 - 3\frac{|r|}{\Delta r} - \sqrt{-3\left(1 - \frac{|r|}{\Delta r}\right)^2 + 1} \right] & \text{for } 0.5\Delta r \leq |r| \leq 1.5\Delta r, \\ \frac{1}{3\Delta r} \left[1 + \sqrt{-3\left(\frac{|r|}{\Delta r}\right)^2 + 1} \right] & \text{for } |r| \leq 0.5\Delta r, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (5)$$

בהתאם לאלגוריתם SIMPLE ניתן לרשום את משוואות

אף אל פי שצימוד בלתי מפורש מבטיח קיום מדויק של תנאי שפה של אי-החלקה על שפת הגוף המוטבע, יישום הגישה כרוך לעתים במימוש לא טריוויאלי של מספר שלבי ביניים הדורש הכנסת שינויים מהותיים בפתרון קיים כלשהו. מטרת המחקר המוצג היא קידום הגישה האלטרנטיבית לפיה שיטת immersed boundary אינה שיטה העומדת בפני עצמה, אלא השיטה מהווה דרך של קיום תנאי שפה וניתנת לצימוד עם כל פותרן קיים של משוואת NS.

הצגה של הרעיון מתבצעת באמצעות הרחבה של פתרון אשר פותח לאחרונה על ידי וויטושקין וגלפגט [12] המבוסס על שיטת SIMPLE [13] לצימוד בין שדות רכיבי המהירות לבין שדה הלחצים. חישוב הכוחות הלגרנג'יים מתבצע באופן בלתי מפורש למחיצה. כלומר האילוצים הקינמטיים מופעלים על מהירות הביניים בשלב הפרדיקציה אשר מתוקנת לאחר מכן ביחד עם שדה הלחצים כדי לקיים את אילוץ האי-דחיסות. יש לשם לב שהאילוצים הקינמטיים נאכפים עבור שדה ביניים ולא עבור שדה אמיתי של המהירות (כפי שמקובל בצימוד הבלתי-מפורש באופן מוחלט). למרות זאת, בעבודה זו אנחנו מראים באמצעות סימולציית הסעה חופשית בתוך כליפה כדורית קונצרטית, שהגישה המוצעת מצליחה לקיים תנאים קינמטיים גם עבור שדה זרימה אמיתי עם דרגת דיוק גבוהה.

רקע תאורטי

הזרימה של ההסעה הטבעית נשלטת על ידי משוואות NS ומשוואת אנרגיה לא ממדיות הבאות:

$$(1) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \nabla^2 \mathbf{u} + \theta \vec{e}_z + \mathbf{f}$$

$$(3) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta = \frac{1}{\sqrt{Pr Ra}} \nabla^2 \theta + q,$$

כאשר כוחות הציפה מחושבים בהתאם לקירוב Boussinesq. $\mathbf{u} = (u, v, w)$, p , t , θ הם מהירות, לחץ, זמן וטמפרטורה לא ממדיים ו- \vec{e}_z הוא וקטור היחידה בכיוון אנכי. בהתאם לקירוב Boussinesq שינויי הצפיפות מקורבים על ידי הביטוי $\rho = \rho_0(1 - \beta(T - T_c))$ כאשר ρ_0 כפי שהנמצא בשינוי משקל טרמי. הנרמול של המשוואות נעשה על-ידי שימוש בסקלות $L, U = \sqrt{g\beta L \Delta T}$, $t = \frac{L}{U}$ ו- $P = \rho U^2$ עבור זמן, מהירות, אורך ולחץ בהתאמה. מספרי ריילי, Pr ופרנטל, Pr מוגדרים כ-

(a-b) מטריצה H המתייחסת לאופרטור Helmholtz הבנוי עבור שדות טמפרטורה ומהירות היא המטריצה בעלת המימד הגדול ביותר $m \times m$ כאשר m מתייחס לסך מספר הנעלמים השייכים לרשת האוילרית (בד"כ $(10^6 - 10^7)$). מטריצה H היא מטריצה דלילה. כך למשל, עבור דיסקרטיזציה מרחבית, אשר יושמה במחקר הנוכחי, המטריצה מכילה איברים שונים מ-0 רק לאורך 7 אלכסונים. עבור סוגים שונים של דיסקרטיזציה אשר יכולים להיות מבוססים על סכמות מסדר גבוה מטריצה H תכיל יותר איברים שאינם אפס אך עדיין תישאר דלילה. מטריצות I ו- R המכילים איברים המתייחסים לשיטת immersed boundary הן בעלי מימד $n \times m$ ו- $m \times n$ בהתאמה, כאשר n מתייחס לכמות של נקודות לגרנג'ות (בד"כ $(10^3 - 10^4)$) המגדירות את השפות של כל הגופים המוטבעים המעורבים בסימולציה. כמות האיברים השונים מ-0 בשורה או בעמודה ה- n כלשהי של אופרטורים I ו- R בהתאמה תלויה בגרעין הספציפי של פונקציית Dirac או בסדר של פולינומי האינטרפולציה המיושמים באופרטורים I ו- R אבל בכל מקרה הכמות לא תעלה על $O(10^2)$. כתוצאה מכך מטריצות I ו- R הן מטריצות דלילות מאוד. שתי המטריצות נשמרות בפורמט דחוס (CSR) והמכפלה שלהם בוקטור כלשהו מתבצעת על-יד שימוש ברוטינות סטנדרטיות מספריית Intel Math Kernel Library (MKL).

זכר כעת שברשותנו נמצא פתרון קיים [12] או כל פתרון אחר המבוסס על אלגוריתם SIMPLE אשר יודע לפתור משוואת NS $[H_{\theta,u}][\theta, u] = [RHS_{\theta,u}]$ ללא יכולת immersed boundary. הפתרון הקיים יכול להיות מנוצל כקופסה שחורה לחישוב מכפלה של אופרטור Helmholtz ההופכי, H^{-1} בכל וקטור נתון בעל מימד $m \times 1$ המהווה חלק אינהרנטי באלגוריתם המוצע עבור פתרון של מערכת משוואות (a-b 11) כמפורט בטבלה 1.

פירטי היישום

יש לציין כי המחקר הנוכחי מתרכז בקונפיגורציות המאופיינות על-ידי שפה סטטית. עובדה זאת מאפשרת לחשב מראש את מטריצה $[IH^{-1}R]$. שלב זה דורש זמן חישוב ארוך אך מתבצע רק פעם אחת בתחילת הסימולציה. לאחר השלמת שלב זה ניתן לקבל את הפתרון הסופי בכל צעד זמן על ידי הצבה לאחור (אם לאחר הבניה מטריצה $[IH^{-1}R]$ עברה פירוק LU על ידי שיטה ישירה) או על-ידי שימוש בשיטות איטרטיביות קיימות המבוססות למשל על שיטת Multigrid או שיטות Krylov. במחקר הנוכחי יושמו שתי אפשרויות. פרטים נוספים הודות כל שלבי האלגוריתם נתונים בטבלה 1.

NS ומשוואת אנרגיה (3-1) בצורה דיסקרטית :

$$\frac{3\theta^{n+1}}{2\Delta t} - \frac{1}{\sqrt{PrRa}} L(\theta^{n+1}) - R(Q^k(X^k)) = \frac{4\theta^n - \theta^{n-1}}{2\Delta t} - N(\theta^n, u^n) + \theta^n \bar{e}_z \quad (6)$$

$$\frac{3u^{n+1}}{2\Delta t} - \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} L(u^{n+1}) - R(F^k(X^k)) = \frac{4u^n - u^{n-1}}{2\Delta t} - N(u^n) + \theta^{n+1} \bar{e}_z - \nabla p^n \quad (7)$$

$$\Delta(\delta p) = \frac{3}{2\Delta t} \nabla \cdot u^* \quad (8)$$

$$u^{n+1} = u^* - \frac{2\Delta t}{3} \nabla(\delta p), \quad p^{n+1} = p^n + \delta p, \quad (9)$$

כאשר דיסקרטיזציה בזמן נעשתה על-ידי הפרש אחורי מסדר שני ודיסקרטיזציה במרחב נעשתה באמצעות שיטת נפחים סופיים מסדר שני. אופרטורים N ו- L מתארים איברים לא ליניאריים וליניאריים, בהתאמה, של משוואות NS. בהתאם לפורמליזם של שיטת SIMPLE איבר הלחץ במשוואה (7) נלקח מצד זמן קודם. הפתרון מתקבל תחילה עבור מהירות ביניים u^* . לאחר מכן על-ידי פתרון משוואת פואסון (8) מתקבל שדה תיקוני לחץ אשר משמש לחישוב סופי של שדה לחצים ומהירויות בצעד זמן הבא על-ידי הצבה למשוואות (9).

פורמליזם של שיטת immersed boundary בלתי-מפורשת למחיצה

איברים $R(Q^k(X^k))$ ו- $R(F^k(X^k))$ נכנסים למשוואות (6-7) בצורה בלתי מפורשת ולכן נדרשת הוספת קשרים נוספים להשגת סגירות של מערכת המשוואות. מערכת המשוואות המלאה המאפשרת חישוב של θ^{n+1} ושדה המהירות הביניים u^* ניתן לרשום בצורה בלוק-מטריציאלית באופן הבא:

$$\begin{bmatrix} H_{\theta,u} & R(Q^k(X^k), F^k(X^k)) \\ I(\theta(x_i), u^*(x_i)) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta^{n+1}, u^* \\ Q, F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RHS_{\theta,u}^{n+1,n} \\ \theta_b, U_b \end{bmatrix} \quad (10a)$$

$$\Delta(\delta p) = \frac{3}{2\Delta t} \nabla \cdot u^*, \quad (10b)$$

$$u^{n+1} = u^* - \frac{2\Delta t}{3} \nabla(\delta p), \quad p^{n+1} = p^n + \delta p, \quad (10c)$$

כאשר $H_{\theta,u}$ מתייחס לאופרטור Helmholtz הפועל על שדות הטמפרטורה והמהירות, $R(Q^k(X^k), F^k(X^k))$ מתייחס לאיברים המתקבלים כתוצאה מרגולריזציה של צפיפות של הספקי חום וכוחות המוגדרים בנקודות לגרנג'יות לסביבה הקרובה של נקודות אוילריות ו- $I(\theta(x_i), u(x_i))$ מתייחס לאיברים המתקבלים על-ידי אינטרפולציה של שדות הטמפרטורה והמהירות האוילריים לנקודות לגרנג'יות הסמוכות.

שימוש בגישת Schur complement מאפשר לפרק את מערכת המשוואות (10-a) לשתי תת-מערכות אקוויולנטיות באופן הבא:

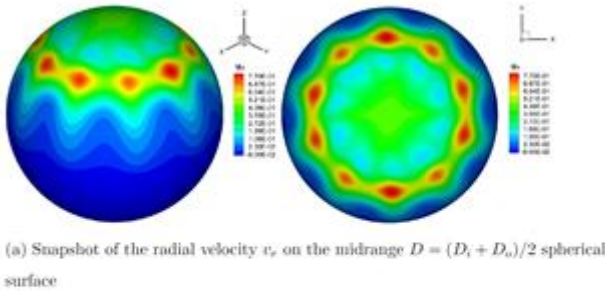
$$[Q, F] = [IH^{-1}R]^{-1} [IH^{-1}RHS_{\theta,u}^{n+1,n} - \theta_b, U_b] \quad (11a)$$

$$[\theta, u^*] = H^{-1} [RHS_{\theta,u}^{n+1,n} - R[Q, F]], \quad (11b)$$

לאחר הפילוג הפתרון מתבצע בשני שלבים. בשלב הראשון פותרים מערכת משוואות (11-a) למציאת שדות כופלי לגרנג' Q ו- F . בשלב השני פותרים מערכת משוואות (11-b) למציאת שדות טמפרטורה θ ומהירות הביניים u^* . מבט קרוב יותר למאפיינים המבניים של מטריצות H , I , ו- R מאפשר גלות דרכים יעילות לפתרון מערכת משוואות (11)

המרכזים של שתי הספרות מתלכדים עם המרכז הגאומטרי של הקובייה אשר כל פאותיה מוחזקים גם בטמפרטורה נמוכה θ_c . נרמול של הממד האורכי נעשה באמצעות הפרש בין רדיוס של הספרה החיצונית R_o לבין רדיוס של הספרה הפנימית R_i כך שמרחק הלא ממדי בין השפות של שתי הספרות שווה תמיד ליחידה. פרמטר נוסף המגדיר את הגיאומטריה של הקונפיגורציה שבנידון הוא היחס בין הרדיוס של הספרה הפנימית לבין הרדיוס של הספרה החיצונית $\phi = R_i/R_o$. כל הסימולציות המוצגות במאמר הנוכחי בוצעו עבור ערכים של $Ra = 4.6 \times 10^4$, $\phi = 0.714$ ו- $Pr = 0.7$.

עבור מספרים הנ"ל מתפתחת זרימה מורכבת לא תמידית המאופיינת על ידי תאי הסעה בדידים. האי-יציבות הנצפת במקרה הזה ידועה בשם "traveling wave" ומאפייניה מתוארים בפירוט במחקרים הקודמים [17,18]. ציור 3 מציג התפלגות רגעית של רכיב המהירות v_r הנלקח בשפה של הספרה המאופיינת על ידי קוטר השווה לממוצע בין הקטרים של הספרה החיצונית והספרה הפנימית $D = 0.5(D_i + D_o)$. בתקופה של 10 תאי הסעה בדידים הנעים עם הזמן לאורך השפה של הספרה. במקרה הנוכחי התנועה היא נגד כיוון השעון אך באותו אופן, אם תנאי התחלה היו שונים, התנועה יכלה להיות גם בכיוון הנגדי. התוצאות הן בהתאם לממצאים שהתקבלו מאנאליזה ליניארית אשר בוצעה לאחרונה עבור הקונפיגורציה הנתונה [18] ולפיה מספר הגל $m = 10$ מאופיין על-ידי יחס הגידול הגבוה ביותר וערך של $Ra_{cr} = 3.9563 \times 10^4$. התמרת פורייה של התפתחות בזמן של הטמפרטורה כלשהי בתוך הקליפה מניבה ערך של תדירות הזווית השווה ל- $\omega = 0.389$ המתלכד עם הערך אשר התקבל באופן בלתי תלוי מאנליזה ליניארית [18].¹



ציור 3 : רכיב המהירות v_r של הסעה חופשית אשר נצפתה בספרה האמצעית המאופיינת על ידי אי-יציבות מהסוג travelling wave המתקבלת עבור $Ra = 4.6 \times 10^4$.

מסקנות

במסגרת המחקר הנוכחי הוצג אלגוריתם חדשני לסימולציות זרימת הסעה טבעית בנפחים סגורים מסביב לגופים בעלי גיאומטריה לא רגולרית. האלגוריתם שפותח מבוסס על שיטת immersed boundary כאשר הצימוד בין הכוחות ושטפי החום הלגרניים ובין שדות המהירות והטמפרטורה

The solution of $[Q, F] = [IH^{-1}R]^{-1}[IH^{-1}RHS_{\theta,u}^{n-1,n} - \theta_b, U_b]$, (Eqs. (11-a))	
1-a. Calculation of $H^{-1}RHS_{\theta,u}^{n-1,n}$:	Employees the original solver [12]. The result is $m \times 1$ vector.
2-a. Calculation of $IH^{-1}RHS_{\theta,u}^{n-1,n}$:	Employees matrix-vector multiplication of the matrix I stored in compressed sparse row (CSR) format by the vector $H^{-1}RHS_{\theta,u}^{n-1,n}$ obtained in 1-a. The result is $n \times 1$ vector.
3-a. Calculation of $IH^{-1}RHS_{\theta,u}^{n-1,n} - \theta_b, U_b$:	Substraction of two $n \times 1$ vectors. The result is $n \times 1$ vector.
4-a. Calculation of $[IH^{-1}R]$:	The procedure is repeated n times for every column $[R]_n$ of the matrix R . The original solver [12] is employed first to calculate $H^{-1}[R]_n$, followed by matrix-vector multiplication $IH^{-1}[R]_n$. The final result is stored in the column $[IH^{-1}R]_n$ of the $n \times n$ matrix.
5-a. Calculation of $[IH^{-1}R]^{-1}[IH^{-1}RHS_{\theta,u}^{n-1,n} - \theta_b, U_b]$:	Either by employing LU factorization of the small $n \times n$ matrix ^a or by any iterative (e.g. Krylov space or multigrid based) methods ^b .
The solution of $[\theta, u^*] = H^{-1}[RHS_{\theta,u}^{n-1,n} - R[Q, F]]$, (Eqs. (11-b))	
1-b. Calculation of $R[Q, F]$:	Employees matrix-vector multiplication of the matrix R stored in compressed sparse row (CSR) format by the vectors $[Q, F]$ calculated by the solution of Eqs. (11-a).
2-b. Calculation of $[RHS_{\theta,u}^{n-1,n} - R[Q, F]]$:	Substraction of two $m \times 1$ vectors. The result is $m \times 1$ vector.
3-b. Calculation of $H^{-1}[RHS_{\theta,u}^{n-1,n} - R[Q, F]]$:	Employees the original solver [12]. The result is $m \times 1$ vector.

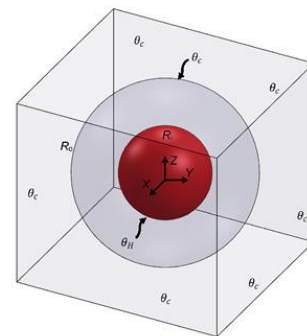
Table 1: A detailed description of the major steps of the developed algorithm for solution of the system of Eqs. (11-a, b).

^aWe use an open source MUMPS package [15,16]

^bWe use bi-conjugate gradient (BICG) method.

תוצאות ודין

במסגרת המאמר הגבלנו את עצמינו בניתוח של קונפיגורציות זרימה אחת בלבד. הקונפיגורציה היא הסעה טבעית בתוך קליפה כדורית. חשוב לציין שהמקרה הנתון הוא הכללי ביותר דהיינו מדובר בתווך הסגור על-ידי גופים בעלי גיאומטריית שפה לא רגולרית ומשטר הזרימה טרנזיאנטי. עקב כך שימוש מוצלח באלגוריתם הנ"ל עבור קונפיגורציות זרימה הנוכחית מהווה וולידציה מספקת והוכחה שהשיטה תעבוד גם עבור קונפיגורציות זרימה אחרות. מודל פיסיקאלי של קונפיגורציות הזרימה נתון בציר 2. ספרה פנימית בעלת רדיוס R_i מוחזקת בטמפרטורה גבוהה θ_H ומוקפת באופן קונצנטרי על-ידי ספרה חיצונית בעלת רדיוס R_o המוחזקת בטמפרטורה נמוכה θ_c .



ציור 2 : מודל פיסיקאלי של קליפה כדורית קונצנטרית המחוממת באופן שונה. הקליפה ממוקמת במרכז הקובייה.

¹ ערך של ω_{cr} המדווח ב- [18] עבר נרמול נוסף על-ידי חלוקה ב- \sqrt{PrRa} כדי להתאם לנרמול של המחקר הנוכחי.

- dimensional parabolic flows, *Int. J. Heat Mass Transf.* 15 (1972) 1787-1806.
14. A. Roma, C. S. Peskin, M. J. Berger, An adaptive version of the immersed boundary method, *J. Comput. Phys.*, 153 (1999) 509-534.
 15. P. Amestoy, I. Duff, J. LExcellent, J. Koster, Multifrontal parallel distributed symmetric and unsymmetric solvers, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 184 (1998) 501-520.
 16. P. Amestoy, I. Duff, J. LExcellent, J. Koster, A fully asynchronous multifrontal solver using distributed scheduling, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 23 (2001) 15-41.
 17. N. Scurtu, B. Futterer, C. Egbers, Three-dimensional natural convection in spherical annuli, *Journl of Phycics: Conference Series* 137, 012017 (2008) 1-9.
 18. V. Travnikov, K. Eckert, S. Odenbach, Linear stability analysis of the convective flow in a spherical gap with $\eta = 0.714$, *Int. J. Heat and Mass Transfer* 80 (2015) 266-273.
- האויילריים מתבצע באופן בלתי-מפורש למחיצה. המתודולוגיה הנומרית החדשה יושמה לסימולציית זרימת הסעה חופשית בקליפה כדורית קונצנטרית. נמצאה התאמה מציגת בין תוצאות המחקר והתוצאות הידועות מספרות. האופי הגנרי של האלגוריתם שפותח מאפשר לשלבו בקלות בכל פותרן משוואות NS הקיים המבוסס על אלגוריתם SIMPLE.
- ### מקורות
1. C. S. Peskin, Flow patterns around heart valves: a numerical method, *J. Comput. Phys.* 10 (1972) 252-271.
 2. J. Mohd-Yusof, combined immersed-boundary/b-spline methods for simulations of flow in complex geometries, *Center for Turbulence Research, Annual Research Briefs* (1997), 317-327.
 3. R. Mittal, G. Iaccarino, The immersed boundary method, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 37 (2005) 239-261.
 4. H. S. Yoon, D. H. Yu, M. Y. Ha, Y. G. Park, Three-dimensional natural convection in an enclosure with a sphere at different vertical locations, *Int. J. Heat Mass Tranfer* 53 (2010) 3143-3155.
 5. W. W. Ren, C. Shu, W. M., Yang, Boundary condition-enforced immersed boundary method for thermal flow problems with Dirichlet temperature condition and its applications, *Comput. Fluid.* 57 (2012) 40-51.
 6. W. Ren, C. Shu, W. Y., An efficient immersed boundary method for thermal flow problems with heat flux boundary conditions, *Int. J. Heat and Mass Transfer* 64 (2013) 694-705.
 7. Y. Gulberg, Y. Feldman, On laminar natural convection inside multi-layered spherical shells, *Int. J. Heat and Mass transfer* 91 (2015) 908-921.
 8. R. Glowinski, T. Pan, J. Periaux, Distributed Lagrange multiplier methods for incompressible viscous flow around moving rigid bodies, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* 15, (1998) 181-194.
 9. Z. Yu, N., Phan-Thien, Y. Fan, R. Tanner, Viscoelastic mobility problem of a system of particles, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 104 (2002) 87-124.
 10. Z. Yu, N., Phan-Thien, Y. Fan, R. Tanner, Dynamical simulation of sphere motion in a vertical tube, *J. Fluid Mech.* 518 (2004) 61-93.
 11. K. Taira, T. Colonius, The immersed boundary method: A projection approach, *J. Comput. Phys.* 225 (2007) 3121-3133.
 12. H. Vitoshkin, A. Y. Gelfgat, On direct inverse of Stokes, Helmholtz and Laplacian operators in view of time-steper-nased Newton and Arnoldi in incompressible CFD, *Commun. Comput. Phys.* 14 (2013) 1103-1119.
 13. S. V. Patankar, D. B. Spalding, A calculation procedure for heat, mass and momentum in three-