

עלון האיגוד הישראלי לשיטות חישוביות במכניקה

מספר 36

פברואר 2017

**עורך:** אלעד פריאל, המחלקה להנדסת מכונות, המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון, באר-שבע 84100, טל. 6475884 (08), דואר אלקטרוני: eladp@sce.ac.il  
**חברי ועד אישח"מ:** מיכאל אנגלמן, רמי בן-צבי, פנחס בר-יוסף, דן גבעולי, יצחק הררי, עמיאל הרשגה, יונתן טל (אחראי האתר), זהר יוסיבאש (נשיא), סלבה קרילוב (מזכיר-גזבר)  
**איש-קשר עם ECCOMAS:** מישל ברקובייה  
**ועדת ביקורת:** מחמוד ג'בארין ומרדכי סנטו  
**אתר אישח"מ (IACMM) באינטרנט:** <http://www.iacmm.org.il>  
**רישום לחברות באגוד ופרטים נוספים:** באתר האגוד הנ"ל, או פנו למזכיר-גזבר, פרופ' סלבה קרילוב, טל. 054-7746664, דואר אלקטרוני: [krylov@tauex.tau.ac.il](mailto:krylov@tauex.tau.ac.il)

**מ-"שולחן העורך":**

אתם מוזמנים לבקר באתר האגוד בו תמצאו מידע על האיגוד ועל מכניקה חישובית בארץ ובעולם <http://www.iacmm.org.il>. באתר תוכלו לצרף עצמכם (ללא תשלום) לרשימת התפוצה האלקטרונית, להירשם כחברים באגוד או לחדש את חברותכם. טופס רישום לאיגוד ניתן למצוא ב <http://www.iacmm.org.il/member>.

**עדכונים מיום העיון הקודם:**

יום העיון ה-41 נערך ב-27 באוקטובר במכללה האקדמית להנדסה ע"ש סמי שמעון בבאר שבע. המארגנים המקומיים היו דר' ניר טרבלסי ודר' אלעד פריאל. המרצה האורח היה פרופ' גדעון סהר ראש המחלקה לניתוחי לב חזה בביה"ח סורוקה. פרופ' סהר נתן הרצאה מרתקת על חידושים בניתוחי לב חזה והקשר שלהם למדע ההנדסה



**ISCM41 – פרופ' סהר מרצה**

יום העיון היה מוצלח מאוד וכלל מספר רב של משתתפים מהאקדמיה ומהתעשייה.

**ISCM-42**

יום העיון ה-42 יתקיים ב-30 במרץ 2017, בפקולטה להנדסת מכונות של הטכניון. (המארגנים הם פרופ' פנחס בר יוסף ופרופ' מחמוד ג'בארין). המרצה המוזמן הוא **Prof Sauro Succi – Research Director IAC-CNR, Rome**

בעלון הקודם התייחסתי לבעיות רב תחומיות בהנדסה ולצורך במודלים חישוביים המתארים תופעות פיסקאליות מצומדות (שדות תרמיים ומכאניים כדוגמה) על מנת שניתן יהיה לתת תחזית או לבצע חקר של תופעה מסויימת. במקרים רב תחומיים אלו הסיבוכיות נובעת מהקשרים הקונסטטיטוטיביים המצומדים והאתגר הוא לפתור את המשוואות השולטות על מרחב בעיה נתון עבור תנאי שפה והתחלה מוגדרים. בבעיות אלו קידום של הפתרון בזמן יכול להתבצע בעזרת סכמות מפורשות (Explicit) או סתומות (Implicit) אך תמיד ההתקדמות תהיה אל צעד הזמן הבא. אתגר אחר לגמרי הוא המקרה שבו המשוואות השולטות אולי פשוטות אך מרחב הבעיה איננו ידוע במלואו. במקרים שכאלו ניתן באופן תיאורטי לפתור בעיות "אחוריות" אשר בהם במידה ואנו יודעים את הפתרון על שפת המרחב כתלות בזמן (לדוגמה, בעזרת מדידים מניסוי) ניתן לדלות מידע על מרחב הפתרון עצמו על ידי הרצה של צעדי זמן אחורה (time-reversal).

בעלון שלפניכם נידון נושא זה במאמר מרתק שנכתב על ידי מר תומר לוין (סטודנט של פרופ' אלי טורקל מאוניברסיטת תל אביב ופרופ' דני גבעולי מהטכניון). ברצוני לנצל הזדמנות זו על מנת לברך את תומר על בחירת ההרצה שהעביר בכנס האישח"מ האחרון כהרצה המצטיינת של יום העיון ה-41.

מבין שתי ההרצאות המצטיינות של ימי העיון ה-40 וה-41 נבחרה הרצאתו של מר ליאור מדינה (ההרצה המצטיינת של יום העיון ה-40) כהרצה המצטיינת לשנת 2016. ליאור יזכה במימון של האיגוד להצגת עבודת המחקר שלו בכנס בינלאומי בתחום. ברכות לליאור.

זו ההזדמנות להזכיר את האתגר החישובי הדין בבעיה תרמו מכאנית מצומדת שהוצג לקהילה בעלון הקודם (עלון מספר 35). ניתן לקרוא על האתגר באתר האיגוד.

אני מזמין את חברי האיגוד (ואת שאינם עדיין חברי האיגוד) לנתח את הבעיה ולשלוח אלי את התוצאות. המטרה היא להשוות בין התוצאות המכונסות של קבוצות חישוביות שונות.

כמו תמיד, אשמח לשמוע מכל אחד ואחת מחברי האיגוד בנוגע לתכנים אשר הם היו מעוניינים לראות מופיעים בעלון. אנא פנו אלי במייל בכל שאלה או הצעה.

Lattice Boltzmann simulation of אשר ירצה בנושא: complex states of moving matter. פרטים נוספים ניתן למצוא באתר האיגוד ובהודעות לתפוצה.

## זיהוי מכשול באמצעות אלגוריתם ה-TRAC

תומר לוין<sup>1,\*</sup>, אלי טורקלי<sup>1</sup> ודן גבעולי<sup>2</sup>

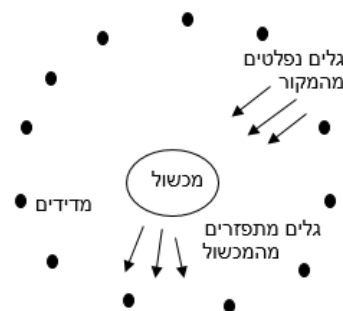
<sup>1</sup> החוג למתמטיקה שימושית, בית הספר למדעי המתמטיקה, אוניברסיטת תל אביב.

<sup>2</sup> הפקולטה להנדסת אווירונאוטיקה וחלל, הטכניון.

\* כתובת אימייל לתגובות: levintmr@gmail.com

### הקדמה

מאמר זה עוסק באלגוריתם לזיהוי מכשול. אלגוריתם לזיהוי מכשול הוא אלגוריתם שנועד למצוא את המיקום והצורה של מכשול לא ידוע. הרעיון הבסיסי של אלגוריתם כזה מתואר בשלבים הבאים. בשלב הראשון, אנו מייצרים גלים על ידי מקור גלים ידוע. גלים אלו פוגעים במכשול, מתפזרים ממנו ונקלטים במדידים המקיפים את המכשול, ראה איור 1. בשלב השני, אלגוריתם זיהוי המכשול משתמש בגלים שנקלטו במדידים על מנת למצוא את המיקום והצורה של המכשול.



איור 1 – תיאור כללי של מערכת לזיהוי מכשול

באפליקציות רבות קיים צורך באלגוריתם כזה. דוגמאות לאפליקציות כאלה ניתן למצוא בבדיקות לא הורסות (Non-destructive testing) לאיתור סדקים [1] ובהדמיה רפואית למציאת אבנים בכליות [2]. דוגמאות נוספות מتركוזות בזיהוי מכשולים בתחומים גדולים מאוד, כמו איתור פגמים מתחת לאדמה [3] או מציאת מכשולים תת-ימיים [4]. במאמר זה נתמקד בזיהוי מכשול במרחב דו-ממדי אינסופי. כמו כן, נניח כי המשוואה השולטת היא משוואת הגלים האקוסטיים התלויה בזמן. יחד עם זאת, השיטה המוצגת במאמר זה היא כללית, וניתן ליישמה גם עם משוואות גלים אחרות, כמו לדוגמה משוואת הגלים האלסטיים או משוואות מקסוול.

השיטה אותה נציג היא שיטת ה-TRAC (קיזור של Time Reversed Absorbing Condition) אשר פותחה לראשונה במאמר [5]. אנו נראה כי באמצעות שיטה זו ניתן למצוא גם את המיקום וגם את הצורה של המכשול, וזאת אף ללא צורך בהנחה מוקדמת של התנאים על שפת המכשול.

### הרעיון של אלגוריתם ה-TRAC

האלגוריתם מובן באופן הטוב ביותר אם נדון קודם כל בבעיה הקדמית, שהיא מציאת שדה הגלים  $u(x, y, t)$  בהינתן מידע מלא על המודל, כלומר בהינתן: גיאומטריה, תכונות חומר, תנאי שפה ותנאי התחלה. הבעיה הקדמית היא:

$$1a. \quad c^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_{tt} ; 0 \leq t \leq T$$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$$

$$1b. \quad \alpha u + \beta u_n = 0 \quad (x, y) \in \Gamma_D$$

$$1c. \quad u(x, y, 0) = u_0(x, y)$$

$$1d. \quad u_t(x, y, 0) = v_0(x, y)$$

כאן  $\mathbb{R}^2$  זה המרחב הדו-ממדי האינסופי,  $D$  מסמן את המכשול ו- $\mathbb{R}^2 \setminus D$  זה המרחב הדו-ממדי האינסופי מחוץ למכשול.  $\Gamma_D$  זה השפה של המכשול.  $T$  זה הזמן הסופי של הבעיה הקדמית.  $c$  זה מהירות הגלים שקבועה ב- $\mathbb{R}^2 \setminus D$ .  $u_0(x, y)$  ו- $v_0(x, y)$  אלו תנאי ההתחלה. לשם פשוטות נסמנו את  $u_0(x, y)$  ו- $v_0(x, y)$  כאשר  $\alpha$  ו- $\beta$  הם פרמטרים כלשהם. אולם, הנחה זו לא פוגעת בכלליות השיטה, והאלגוריתם נשאר קבוע לכל תנאי שפה. ניתן לפרק את שדה הגלים  $u$  באופן הבא:

$$2. \quad u = u^l + u^s$$

כאשר את  $u^l$  אנו מגדירים כפתרון של הבעיה הקדמית במידה ולא קיים מכשול בתחום. בהינתן הגדרה זו, ניתן להסיק כי  $u^l$  מקיים את משוואה (1a) בתחום  $\mathbb{R}^2 \setminus D$ . מכיוון שגם  $u$  וגם  $u^l$  מקיימים את משוואה (1a), אנו מקבלים כי גם  $u^s$  מקיים את משוואה (1a). ניתן כעת להגדיר את הבעיה הקדמית עבור  $u^s$ :

$$3a. \quad c^2(u_{xx}^s + u_{yy}^s) = u_{tt}^s ; 0 \leq t \leq T$$

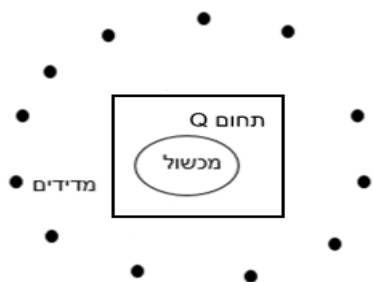
$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$$

$$3b. \quad \alpha u^s + \beta u_n^s = -\alpha u^l - \beta u_n^l \quad (x, y) \in \Gamma_D$$

$$3c. \quad u^s(x, y, 0) = 0$$

$$3d. \quad u_t^s(x, y, 0) = 0$$

בעיה קדמית זו מתארת גלים שנפלטים מהשפה של המכשול. כעת, נניח כי תחום קמור  $Q$  כלשהו מכיל את המכשול  $D$ , ראה איור 2. מכיוון שהגלים  $u^s$  נפלטים מהשפה של המכשול שבתוך  $Q$ , ניתן להראות כי ההתקדמות של הגלים על השפה של  $Q$  היא אך ורק בכיוון היוצא מהתחום  $Q$ .

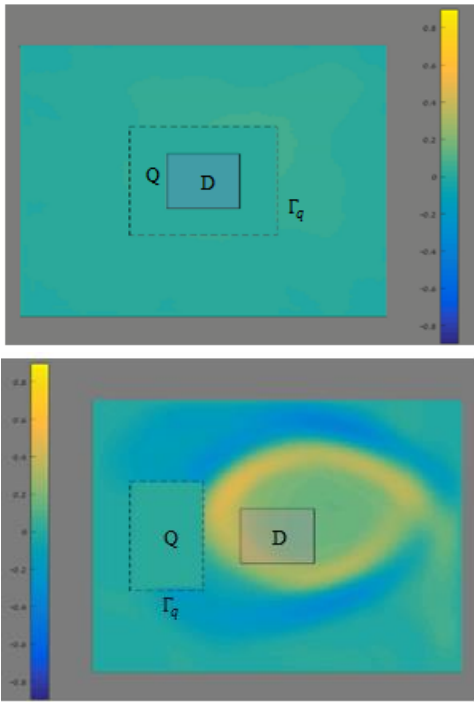


איור 2 – תחום Q אשר מכיל את המכשול

נסמן ב- $ABC$  תנאי שפה סופג (Absorbing boundary condition), וב- $\Gamma_q$  את השפה של  $Q$ . מטרתו של תנאי השפה הסופג היא לאפשר לגלים להתקדם רק בכיוון מסוים, עם החזרות מעטות ככל האפשר לכיוון המנוגד. משום שכיוון ההתקדמות של  $u^s$  על השפה  $\Gamma_q$  הוא רק בכיוון היוצא מ- $Q$ , אז  $u^s$  מקיים:

$$4. \quad ABC(u^s) = 0 \quad (x, y) \in \Gamma_q$$

בפועל, לא ניתן לבנות תנאי שפה סופג "לחלוטין", וניתן רק לנסות ולהפחית את החזרות מהשפה. לדוגמה, תנאי שפה סופג של היגדון מסדר ראשון (first order Higdon) נתון על ידי:



איור 4 – הפתרון  $w^s(x, y, T)$ . מלמעלה: תחום Q מכיל את המכיל  
את המכשול. מלמטה: תחום Q אשר לא מכיל את המכשול

**בחירת תנאי שפה סופג ופתרון בעיית השפה בשיטת האלמנטים הסופיים**

כדי לפתור את בעיית השפה (6) יש לבצע שלושה שלבים. ראשית, יש לבחור תנאי שפה סופג (4). שנית, יש לשנות את תנאי השפה באופן מתאים כך שספוג את הגלים שנכנסים לתחום Q (6c). לבסוף, אנו פותרים את בעיית השפה (6) באמצעות שיטת האלמנטים הסופיים. לדוגמה, עבור תנאי השפה (5) מתקבל:

$$10. \text{TRAC}(w^s) = w_{,t}^s + cw_{,n}^s$$

כלומר תנאי השפה "האחורי" (10) זהה במקרה זה לתנאי השפה "הקדמי" (5). כעת, פתרון הבעיה (6) בשיטת האלמנטים הסופיים מניב מערכת משוואות דיפרנציאליות המצורה:

$$11. \mathbf{M}\vec{d}_{,tt}(t) + \mathbf{C}\vec{d}_{,t}(t) + \mathbf{K}\vec{d}(t) = \vec{F}$$

כאשר האיברים של הווקטור הלא ידוע  $\vec{d}(t)$  זה הפתרון של  $w^s$  בצמתים השונים בזמן  $t$ . החישוב של המטריצות  $\mathbf{M}$  ו- $\mathbf{K}$ , ושל הווקטור  $\vec{F}$  הוא סטנדרטי. אולם, מעניין לציין כי במקרה זה התקבלה מטריצת ריסון  $\mathbf{C}$  אך ורק בגלל תנאי השפה (10). החישוב מגלה כי האיברים של מטריצת הריסון הם:

$$12. C_{AB} = \int c \Phi_A \Phi_B$$

כאן  $\Phi_A$  זה פונקציית הצורה של צומת A. דוגמה נוספת של תנאי שפה סופג ניתנת על ידי:

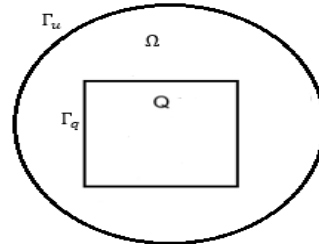
$$13. ABC(w^s) = 2w_{,tt}^s + 2cw_{,nt}^s - c^2w_{,dd}^s = 0$$

$$5. ABC(u^s) = u_{,t}^s + cu_{,n}^s = 0 \quad (x, y) \in \Gamma_q$$

כאשר  $n$  הוא הנורמל לשפה  $\Gamma_q$  בכיוון היוצא מהתחום Q. כעת נסתכל על בעיית השפה "האחורית" (time-reversed) בתחום הסופי  $\Omega$ . כאן זה התחום הכלוא על ידי המדידים, אשר מחוץ לתחום Q, ראה איור 3. הבעיה עבור  $w^s$  היא:

- 6a.  $c^2(w_{,xx}^s + w_{,yy}^s) = w_{,tt}^s ; 0 \leq t \leq T$   
 $(x, y) \in \Omega$
- 6b.  $w^s(x, y, t) = u^s(x, y, T - t) ; (x, y) \in \Gamma_u$
- 6c.  $\text{TRAC}(w^s) = 0 ; (x, y) \in \Gamma_q$
- 6d.  $w^s(x, y, 0) = 0$
- 6e.  $w_{,t}^s(x, y, 0) = 0$

$\Gamma_u$  מסמן את הגבול החיצוני של  $\Omega$ . תנאי השפה (6c) הוא תנאי השפה שמתקבל מתנאי שפה (4), אך משנים אותו באופן מתאים כך שכעת יספוג גלים בכיוון הנכנס לתחום Q.



איור 3 – התחום החיצוני  $\Omega$

יוצא כי הפתרון של בעיה (6) הוא:

$$7. w^s(x, y, t) = u^s(x, y, T - t)$$

ניתן לוודא זאת ללא קושי רב. ראשית, פתרון זה מקיים את משוואת הגלים (6a) ואת תנאי השפה (6b). כמו כן, במידה ובחרים את הזמן הסופי של הבעיה הקדמית  $T$  מספיק גדול, אזי מתקיים:

- 8a.  $u^s(x, y, T) = 0 \quad (x, y) \in \Omega$
- 8b.  $u_{,t}^s(x, y, T) = 0 \quad (x, y) \in \Omega$

ולכן גם תנאי ההתחלה (6d) ו-(6e) מתקיימים. לבסוף, ראינו כי  $u^s$  אלו גלים אשר יוצאים מהתחום Q. לכן,  $w^s$  המוגדר ב-(7) מתאר גלים אשר נכנסים לתחום Q. לפיכך, גם תנאי שפה (6c) מתקיים. הפתרון של  $w^s$  בזמן  $T$  מקיים:

9.  $w^s(x, y, T) = u^s(x, y, 0) = 0 ; (x, y) \in \Omega$   
אלגוריתם ה-TRAC משתמש בתכונה זו של הפתרון של  $w^s$  בזמן  $T$  לצורך זיהוי המכשול בשיטה של "ניסוי וטעייה". אנו בוחרים תחום Q כלשהו, פותרים את בעיית שפה (6) ובוחרים את הפתרון בזמן  $T: w^s(x, y, T)$ . אם הפתרון בזמן  $T$  הוא 0 בכל התחום  $\Omega$  ניתן להסיק שהמכשול מוכל בתחום Q. בניגוד לכך, אם הפתרון בזמן  $T$  הוא לא 0 בכל התחום  $\Omega$ , ההנחה שהמכשול מוכל בתחום Q איננה נכונה. באופן כזה, על ידי שינוי חוזר של התחום Q, ניתן למצוא את המיקום והצורה של המכשול.

באיור 4 מוצגות דוגמאות לפתרון  $w^s(x, y, T)$  עבור תחום המכיל את המכשול, ועבור תחום Q אשר לא מכיל את המכשול. המכשול הוא ריבוע קטן במרכז המסומן באות D. השפה של התחום Q מסומנת בקו מקווקו.

**שיטה איטרטיבית לזיהוי המכשול**

עד כה ראינו כי אפשר להשתמש באלגוריתם ה-TRAC לזיהוי מכשול בשיטה של ניסוי וטעייה. כלומר, אנו בוחרים תחום Q כלשהו ובאמצעות אלגוריתם ה-TRAC בודקים אם המכשול נמצא בתוך Q. כעת נראה כי ניתן להשתמש באלגוריתם ה-TRAC בצורה כזו כך שאנו מזהים את המכשול באופן אוטומטי.

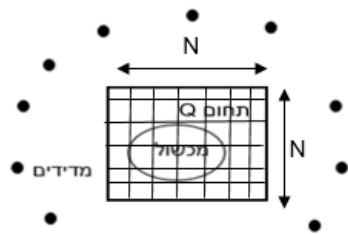
הרעיון של השיטה האיטרטיבית הוא פשוט. אנו מתחילים את התהליך האיטרטיבי עם תחום Q גדול מספיק כך שהמכשול בטוח מוכל ב-Q. התחום Q יכול להיות גם כמעט כל התחום Ω. לאחר מכן, אנו משתמשים באלגוריתם הבא באופן איטרטיבי:

- א.  $Q_{trial} = Q \setminus \delta Q$
- ב. מריצים את ה-TRAC עם התחום  $Q_{trial}$ .
- ג. אם אלגוריתם ה-TRAC מראה שהמכשול מוכל ב-Q אזי:  
 $Q \leftarrow Q_{trial}$

כאשר  $\delta Q$  זהו תת-תחום כלשהו של Q. כלומר, אנו מסירים באופן איטרטיבי תתי-תחומים מ-Q שאלגוריתם ה-TRAC מראה לנו שהמכשול לא שוכן בהם. התהליך נמשך עד שלא ניתן יותר להסיר תתי תחומים מ-Q, והתחום Q התכנס לצורת המכשול.

קיימות שיטות להסרת תתי-תחומים מ-Q באופן יעיל. לדוגמה, ניתן לחלק את התחום Q ל- $N^2 \times N$  מלבנים, ראה איור 6.

חשוב להדגיש שמלבנים אלו אינם בהכרח זהים לרשת האלמנטים הסופיים. המלבנים יכולים להיות זהים או גסים יותר מרשת האלמנטים הסופיים, אך לא עדינים מהם. ניתן להראות כי בסכמה יעילה יש לבצע רק  $O(\log N)$  ריצות (!) של אלגוריתם ה-TRAC עד להסרת המלבנים מ-Q שהמכשול לא נמצא בהם.



איור 6 – חלוקת Q לתתי-תחומים

**מראי מקום**

1. E. Amitt, D. Givoli, E. Turkel, Time Reversal for Crack Identification, Comput. Mechanics 54 (2014).
2. M. Fink, G. Montaldo, N. Tanter, Time Reversal Acoustics in Biomedical Engineering, Ann. Rev. Biomed. Engrg. 5 (2003).
3. J. Claerbout, Imaging the Earth Interior, Blackwell Scientific Publication. London (1985).
4. G.F. Edelmann, J.F. Lingeitch, C.F. Gaumond, D.M. Fromm, D.C. Calvo, Comparison of a Subrank to a Full-Rank Time-Reversal Operator in a Dynamic Ocean. J. Acoust. Soc. Am. 122 (2007).
5. F. Assous, M. Kray, F. Nataf, E. Turkel, Time Reversed Absorbing Condition: Application to Inverse Problems, Inverse Prob. 27 (2011).
6. B. Engquist, A. Majda, Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Waves, Math. Comput. 31 (1977).

כאשר  $d$  זה בכיוון המשיק לשפה  $\Gamma_q$ . תנאי שפה זה נקרא second order Engquist-Majda [6]. עבור תנאי שפה זה מתקבל:

$$14. TRAC(w^s) = 2w_{,tt}^s + 2cw_{,nt}^s - c^2w_{,dd}^s$$

ולכן גם במקרה זה תנאי השפה "האחורי" (14) זהה לתנאי השפה "הקדמי" (13). פתרון בשיטת האלמנטים הסופיים של הבעיה (6) עם תנאי שפה (14) מניב את מערכת המשוואות הדיפרנציאליות:

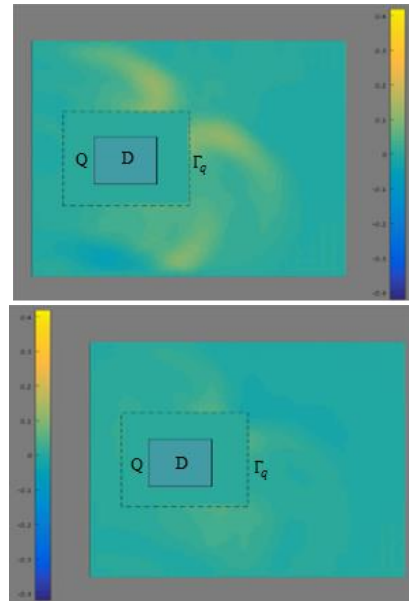
$$15. M\vec{d}_{,tt}(t) + C\vec{d}_{,t}(t) + K\vec{d}(t) = \vec{F} + \vec{\Psi}$$

החישוב מגלה כי המטריצות  $M, C$  ו- $K$  והווקטור  $\vec{F}$  זהים לאלו שהתקבלו במערכת משוואות (11). אולם, כעת נוסף הווקטור  $\vec{\Psi}$  שאיבריו הם:

$$16. \Psi_A = -\frac{c^3}{2} \sum_{B \in \eta} \int_0^t \int \Phi_{A,d} d_B(t') \Phi_{B,d} d \Gamma dt'$$

$\eta$  זה קבוצת הצמתים הפתוחים. הסימון  $\Phi_{A,d}$  זה גזירה בכיוון  $d$  (המשיק) של פונקציית הצורה  $\Phi_A$ . נשים לב כי כעת המשתנה הלא ידוע  $\vec{d}(t)$  נמצא בצד ימין של המערכת (15), בעוד ששיטות סטנדרטיות לפתרון המערכת משוואות דורשות שצד ימין יהיה ידוע. יחד עם זאת, בעזרת אנליזה מתאימה שאיננה מוצגת כאן ניתן לפתור מערכת זו.

באיור 5 אנו משווים את הפתרון  $w^s(x, y, T)$  שהתקבל עם תנאי שפה (10) מסדר ראשון לעומת הפתרון שהתקבל עם תנאי שפה (14) מסדר שני. בשני המקרים התחום Q מכיל את המכשול. ניתן לראות כי עם תנאי השפה (14) הפתרון קרוב יותר ל-0 ב- $\Omega$ , ולכן תנאי השפה (14) עדיף לשימוש עם שיטת ה-TRAC. עוד אנחנו רואים כי באופן מעשי הפתרון  $w^s(x, y, T)$  לא מתאפס לחלוטין ב- $\Omega$  גם אם התחום Q מכיל את המכשול. לכן אנו צריכים להשתמש בערך סף כלשהו על מנת להבדיל בין תחומי Q המכילים את המכשול לאלו שלא.



איור 5 – הפתרון  $w^s(x, y, T)$  מלמעלה: פתרון שהתקבל עם תנאי שפה (10). מלמטה: פתרון שהתקבל עם תנאי שפה (14)