עלון אישח"מ

עלון האיגוד הישראלי לשיטות חישוביות במכניקה

ספטמבר 2014 מספר 31

עורך: זהר יוסיבאש, המחלקה להנדסת מכונות, אונ' בן-גוריון בנגב, באר-שבע 84105,
טל. 6477103 (08), פקס 6477101 (08), דואר אלקטרוני: zohary@bgu.ac.il

אתר אישח"מ (IACMM) באינטרנט: http://www.iacmm.org.il

רישום לחברות באגוד ופרטים נוספים: באתר האגוד הנ"ל, או פנו למזכיר-גזבר,
ד"ר עמיאל הרשאגה, טל. 8183709 (04), פקס 8183723 (04), דואר אלקטרוני: amiel@iec.co.il

מ-"שולחן העורך":

אני מבקש להודות לפרופ"מ עודד אמיר על היענותו לחיבור הכתבה המעניינת בעלון זה המבוססת על הרצאתו ביום העיון ה-36 של האיגוד.

אנא בקרו באתר האגוד http://www.iacmm.org.il, בו מידע על האיגוד ועל מכאניקה חישובית בארץ ובעולם. באתר תוכלו לצרף עצמכם (ללא תשלום) לרשימת התפוצה האלקטרונית, להירשם כחברים באגוד או לחדש את חברותכם. טופס רישום ניתן למצוא ב-http://www.iacmm.org.il/member.

יום העיון ה-36 שנערך ב-24.4.2014 בטכניון היה מוצלח מאוד והשתתפו בו מספר רב של משתתפים. האורח, פרופ' אנטוני פאטרה מ-MIT הוזמן לתת את הרצאת הפתיחה - השקפים מופיעים באתר הבית של אישח"מ.

ISCM-37

יום העיון ה-37 יתקיים ב-23 באוקטובר, 2014, באוניברסיטת תל-אביב (המארגנים הם פרופ' חאג'-עלי ופרופ' גלפגט). המרצים המוזמנים הפעם הם: Prof. Alfio Quarteroni, EPFL Lausanne and the Politecnico di Milano, and prof. Adrian Lew, Stanford University

פרטים נוספים באתר האגוד ובהודעות לתפוצה.

חברי ועד אישח"מ עם פרופ' Patera במהלך יום העיון ה-36 של אישח"מ בטכניון

בחינה מחודשת של אנליזה חוזרת מקורבת באופטימיזציה טופולוגית: על היתרונות הייחודיים של פרוצדורת מינימיזציה של משקל

עודד אמיר - הפקולטה להנדסה אזרחית וסביבתית, הטכניון, חיפה

תקציר

מאמר זה עוסק בהליך חישובי יעיל עבור אופטימיזציה טופולוגית של מבנים בתלת-ממד. הגישה מבוססת על

שימוש חוזר בהתניה מוקדמת (preconditioning) אשר מתבצעת באמצעות פתרון מרובה-שריגים (multigrid). ביישום בסביבת MATLAB, זמן הריצה הוא כמחצית מזמן הריצה של הליכים סטנדרטיים של אופטימיזציה טופולוגית. בכך מספק המחקר התקדמות חשובה לקראת הטמעה עתידית של אופטימיזציה טופולוגית בתוכנות תיב"ם.

<u>הקדמה</u>

מאמר זה עוסק ביעילות החישובית של פתרון בעיה קלאסית בתחום של אופטימיזציה טופולוגית של מבנים רציפים (continuum structures): מציאת פיזור החומר במרחב כך שיתקבל האיזון האופטימלי בין משקל לקשיחות. בעיית האופטימיזציה מנוסחת באמצעות מספר גדול מאד של משתני תכן (המייצגים את קיום החומר במרחב) ומספר קטן יחסית של אילוצים. אז הגישה המקוננת (nested approach) מועדפת בדרך-כלל, לפיכך בעיית האופטימיזציה כוללת את משתני התכן בלבד בעוד שמשוואות שיווי המשקל נפתרות בנפרד. כתוצאה מכך, המאמץ החישובי המושקע בפתרון בעיית האופטימיזציה מושפע בעיקר מהמאמץ הכרוך בביצוע אנליזות מבניות – אחת לפחות לכל איטרציה של תהליך האופטימיזציה – דהיינו פתרון רצף של משוואות שיווי משקל עם מספר גדול מאד של נעלמים (כמספר דרגות החופש של מודל האלמנטים הסופיים).

אחד מכיווני המחקר העוסקים בהפחתת המאמץ החישובי הנ"ל מתמקד ברמת ההליך החישובי. במסגרת זו, הוצע להשתמש באנליזה מדויקת רק באיטרציות תכן מסוימות, ובאנליזה חוזרת מקורבת (approximate reanalysis) בשאר האיטרציות. ההטמעה של גישה זו, בהתבסס על שיטת הקירובים המשולבים של Kirsch (1991), הוצגה במקור ע"י Amir et al. (2009). בעבודה הראשונית הזו התמקדו החוקרים בהטמעה לתוך תהליך מינימיזציה של העבודה החיצונית או אנרגיית העיבורים במבנה תחת אילוץ נפח/משקל. מטרת המחקר הנוכחי הינה לבחון מחדש את השימוש באנליזה חוזרת מקורבת באופטימיזציה טופולוגית של מבנים. הכוונה המרכזית היא להמחיש שניתן להגיע להפחתה משמעותית יותר של זמן החישוב ע"י מעבר לתהליך מינימיזציה של נפח/משקל תחת אילוץ על אנרגיית העיבורים במקום התהליך ההפוך.

<u>אופטימיזציה טופולוגית המבוססת על אנליזה חוזרת</u>

את הבעיה הקלאסית באופטימיזציה טופולוגית של מבנים – מציאת פיזור החומר במרחב כך שיתקבל האיזון האופטימלי בין משקל לקשיחות – ניתן לרשום בשני ניסוחים מתמטיים דומים. בניסוח הראשון נמצאת עבודת הכוחות החיצוניים (אשר זהה לאנרגיית העיבורים) בפונקציית המטרה ומתקיים אילוץ על הנפח:

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{\rho}} \quad f_c = \mathbf{f}^T\mathbf{u} \\ &\text{s.t.:} \quad g_v = \sum_{e=1}^{N} v_e\bar{\rho}_e - V^* \leq 0 \\ &\qquad 0 \leq \rho_e \leq 1 \quad e = 1,\dots,N \\ &\text{with: } \mathbf{K}(\bar{\boldsymbol{\rho}})\mathbf{u} = \mathbf{f} \end{aligned} \qquad (1)$$

כאן, הווקטור $\boldsymbol{\rho}$ מייצג את צפיפות החומר בכל אלמנט סופי – משתני התכן של הבעיה; הווקטור $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ מייצג את הצפיפויות הפיזיקליות המתקבלות לאחר הפעלת פילטר צפיפות; $\mathbf{K}$ היא מטריצת הקשיחות; $\mathbf{f}$ הוא וקטור הכוחות החיצוניים; $\mathbf{u}$ הוא וקטור ההזזות; v_e הוא נפח האלמנט הסופי; V^* הוא הנפח הכולל המותר; ו- N הוא מספר האלמנטים הסופיים במודל, אשר זהה למספר משתני התכן אם אין מגבלות תכן כלשהן. כאשר מחליפים בין פונקציית המטרה לאילוץ, מתקבל הניסוח השני של בעיית האופטימיזציה:

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{\rho}} \quad f_v = \frac{1}{V}\sum_{e=1}^{N} v_e\bar{\rho}_e \\ &\text{s.t.:} \quad g_c = \mathbf{f}^T\mathbf{u} - c^* \leq 0 \\ &\qquad 0 \leq \rho_e \leq 1 \quad e = 1,\dots,N \\ &\text{with: } \mathbf{K}(\bar{\boldsymbol{\rho}})\mathbf{u} = \mathbf{f} \end{aligned} \qquad (2)$$

כאן, V הוא הנפח הכולל של מרחב התכן ו-c^* הוא ערך התכן הדרוש של (פעמיים) העבודה החיצונית.

כאשר עושים שימוש באנליזה חוזרת מקורבת, מחליפים את הפתרון המדויק של משוואות שיווי המשקל בניסוחים הנ"ל בפתרון מקורב, כלומר מתקבל קירוב של ההזזות ומשוואות שיווי המשקל אינן נפתרות בהכרח בדיוק מלא. באיטרציית תכן כלשהי k מוצאים קירוב המקיים:

$$\widetilde{\mathbf{u}_k} \approx \mathbf{u}_k$$
$$\mathbf{K}(\bar{\boldsymbol{\rho}}_k)\widetilde{\mathbf{u}_k} \approx \mathbf{f}$$

בשיטת הקירובים המשולבים (combined approximations) של קירש, הקירוב מתקבל מפתרון מערכת מוקטנת המבוססת על שימוש במספר מצומצם של וקטורי בסיס. וקטורי הבסיס הנבחרים הם האיברים הראשונים בטור אינסופי המתקבל מפיתוח משוואת האנליזה באיטרציה k תוך שימוש בפתרון המדויק מאיטרציה קודמת כלשהי k-l:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{u}_k} \approx\ & \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}(\bar{\boldsymbol{\rho}}_{k-l})^{-1}\Delta\mathbf{K} + \left(-\mathbf{K}(\bar{\boldsymbol{\rho}}_{k-l})^{-1}\Delta\mathbf{K}\right)^2 \right. \\ & + \left(-\mathbf{K}(\bar{\boldsymbol{\rho}}_{k-l})^{-1}\Delta\mathbf{K}\right)^3 \\ & \left. + \cdots \right)\mathbf{u}_{k-l} \end{aligned} \qquad (3)$$

כאשר $\Delta\mathbf{K}$ היא מטריצה המכילה את השינויים בקשיחות בין האיטרציות k-l ו- k אשר במסגרת המחקר הנוכחי נובעים משינויים טופולוגיים במבנה. גישת הקירובים המשולבים אקוויוולנטית למעשה לשיטת PCG (Preconditioned Conjugate

Gradients) כפי שהוכח ע"י Kirsch et al. (2002). זהו למעשה מקרה פרטי של PCG אשר בו משמש הפירוק של מטריצת הקשיחות בשלב k-l להתניה מוקדמת (preconditioning) של מערכת המשוואות בשלב k. לפיכך, ניתן לראות באנליזה החוזרת לפי שיטת קירש כמקרה ספציפי של שימוש חוזר בהתניה מוקדמת (recycled preconditioning) במסגרת הכללית יותר של פתרון איטרטיבי של מערכת משוואות באמצעות PCG. למעשה, מספר וקטורי הבסיס שקיל באופן עקרוני למספר האיטרציות ב-PCG. יתרה מזאת, ניתן להגיע לפתרון מדויק ע"י שימוש במספר גדול של וקטורי בסיס / איטרציות PCG. באותו אופן, שימוש במספר מצומצם של וקטורי בסיס / איטרציות PCG יוביל לקירוב בפתרון מערכת המשוואות. ההקבלה בין הקירובים המשולבים של קירש לבין PCG חשובה לדיון הנוכחי כיוון שעיקר העניין הוא בפתרון בעיות תלת-ממדיות, אז פתרון איטרטיבי של משוואות שיווי המשקל הוא הכרחי.

היתרון החישובי בניסוח מינימום נפח

הממצא המרכזי בעבודה זו שכאשר שואפים להפחית את המאמץ החישובי באמצעות שימוש באנליזה חוזרת (או שימוש חוזר בהתניה מוקדמת), קיים יתרון ממשי לניסוח מינימיזציה של נפח (2) לעומת ניסוח מינימיזציה של אנרגיית עיבורים (1).

ההסבר נעוץ קודם כל בהתכנסות של הסדרה (3). כאשר המטריצה המשמשת להתניה מוקדמת, $\mathbf{K}(\bar{\boldsymbol{\rho}}_{k-l})$, קשיחה יותר מהמטריצה של מערכת המשוואות אותה רוצים לפתור, $\mathbf{K}(\bar{\boldsymbol{\rho}}_{k})$, אזי הסדרה מתכנסת באופן ודאי ללא תלות בגודל ההפרשים $\Delta\mathbf{K}$. לעומת זאת, כשהמטריצה המשמשת להתניה מוקדמת, $\mathbf{K}(\bar{\boldsymbol{\rho}}_{k-l})$, גמישה יותר מהמטריצה של מערכת המשוואות אותה רוצים לפתור, $\mathbf{K}(\bar{\boldsymbol{\rho}}_{k})$, אזי התכנסות הסדרה אינה מובטחת ותלויה בגודל ההפרשים $\Delta\mathbf{K}$. בנוסף, עבור כל צמד מטריצות המייצגות מבנים בשלבים שונים של תהליך האופטימיזציה, כשהמטריצה הקשיחה יותר מבין השתיים משמשת להתניה מוקדמת, אזי קצב ההתכנסות של הסדרה מהיר יותר מאשר במקרה ההפוך.

לאור תכונות אלה של התכנסות הסדרה, ניתן להסיק שישנה עדיפות לתהליך אופטימיזציה שבמסגרתו המבנה "מתגמש" כך שבאופן כללי באיטרציה כלשהי יתקבל מבנה קשיח פחות מאשר באיטרציות קודמות. אז צפויה להתקבל התכנסות מהירה של האנליזה החוזרת (או PCG) וצפוי להתקבל קירוב מדויק יותר. במחקר הראשוני שעסק בהטמעה של אנליזה חוזרת באופטימיזציה טופולוגית, נעשה שימוש בניסוח מינימיזציה של אנרגיית עיבורים תחת אילוץ נפח. בתהליך זה, המבנה באופן כללי "מתקשח" עם התקדמות תהליך האופטימיזציה ולכן האנליזה החוזרת התבצעה עם התניה מוקדמת שאיננה קשיחה יותר מהמטריצה של מערכת המשוואות אותה רוצים לפתור באופן מקורב. מכאן עולה המסקנה שייתכן שניתן לשפר את היעילות החישובית ע"י מעבר לתהליך מינימיזציה של נפח, שבו המבנה בד"כ "מתגמש" והאנליזה החוזרת צפויה להתבצע עם התניה מוקדמת קשיחה יותר מהמטריצה של מערכת המשוואות אותה רוצים לפתור באופן מקורב.

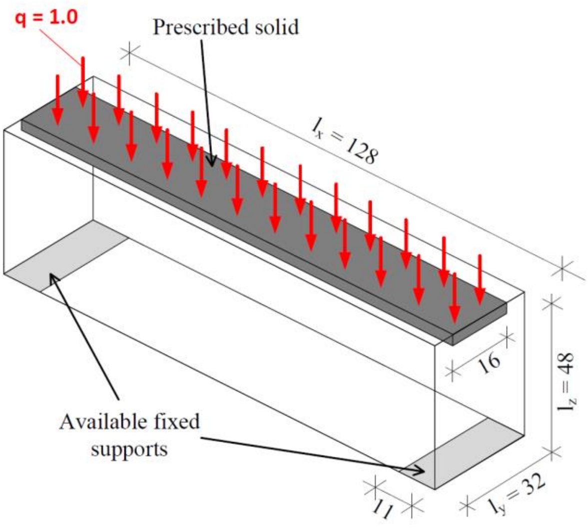
את היתרון החישובי של פרוצדורת מינימיזציה של נפח ניתן להמחיש באמצעות בעיית דוגמא דו-ממדית. את הפרטים המלאים לגבי דוגמא זו ניתן למצוא במאמר מאת Amir (2014). כאשר מיישמים את שני הניסוחים הנ"ל, מתקבלות טופולוגיות מבניות שונות מעט בצורתן אך זהות לחלוטין מבחינה איכותית – יש להן את אותו הנפח ואת אותה אנרגיית עיבורים. עם זאת, כאשר משתמשים באנליזה חוזרת, מתגלה היתרון החישובי של הליך המינימיזציה של נפח: במהלך 200 איטרציות של אופטימיזציה, התבצעו 22 פירוקים של מטריצות קשיחות ונדרשו 369 איטרציות PCG במסגרת האנליזות החוזרות. בהליך המינימיזציה של אנרגיית העיבורים מאידך, התבצעו 25 פירוקים ונדרשו 565 איטרציות PCG. יתרה מזאת, ניתן לראות שהשגיאה הכרוכה באנליזה החוזרת, במונחים של כוחות לא-מאוזנים, קטנה יותר בפרוצדורת מינימיזציה של נפח. כל אלה ממחישים את הפוטנציאל הגלום באנליזה חוזרת, ובאופן כללי יותר בשימוש חוזר בהתניה מוקדמת, במסגרת אופטימיזציה טופולוגית לפי ניסוח (2).

עד כאן עסקנו בעקרונות של אנליזה חוזרת ובהמחשה חישובית בדו-ממד, שנשענה על פירוקי מטריצה בשלבים מוקדמים יותר של תהליך האופטימיזציה. בבעיות תלת-ממדיות, לא נהוג לבצע פירוקי מטריצה עקב דרישות גבוהות של זיכרון מחשב. במקום פותרנים ישירים (direct solvers) נהוג להשתמש בפותרנים איטרטיביים (iterative solvers) כדוגמת PCG או שיטות אחרות ממשפחת Krylov subspace solvers. אז, ניתן לחסוך זמן חישוב יקר ע"י מתן פרשנות ל"אנליזה חוזרת" כ"שימוש חוזר בהתניה מוקדמת" (recycled preconditioning). בעבודה זו, נעשה שימוש בפותרן PCG עם התניה מוקדמת המבוססת על פתרון רב-שריג, או בקצרה MGCG (MultiGrid preconditioned Conjugate Gradients). פותרן זה הראה יעילות גבוהה בבעיות של אופטימיזציה טופולוגית במחקר שפורסם לאחרונה ע"י Amir et al. (2014). במחקר הנוכחי, משמשת המסגרת של MGCG כבסיס ליישום של שימוש חוזר בהתניה מוקדמת. בדוגמאות החישוביות התלת-ממדיות ניתן לראות שהעקרונות שהומחשו בהקשר של אנליזה חוזרת בדו-ממד תקפים גם לשימוש החוזר בהתניית multigrid.

דוגמאות

היעילות החישובית היחסית של הליך מינימיזציה של נפח המשלב אנליזה חוזרת מומחשת להלן באמצעות בעיית תכן טופולוגי של מבנה גשר, המוצגת באיור 1.

המודל החישובי מתייחס לרבע סימטרי של הגשר, המרושת באמצעות 49,152 אלמנטי קובייה ברזולוציה של 64*16*48 אלמנטים.

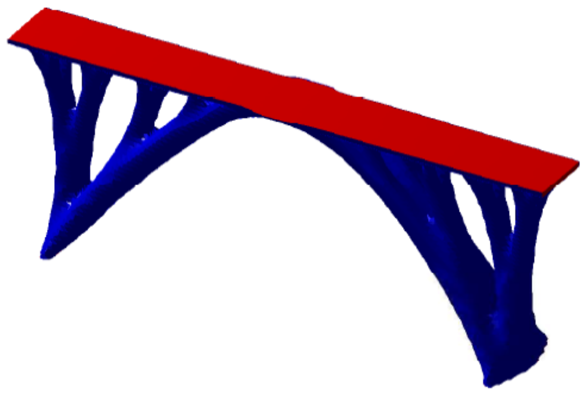


איור 1 – בעיית תכן טופולוגי של מבנה גשר תלת-ממדי

מספר דרגות החופש במודל האלמנטים הסופיים הוא 162,435. נעשה שימוש בארבעה רישותי multigrid כך שברמה הגסה ביותר מתקבלת רשת של 8*2*6 אלמנטים. בהליך מינימיזציה של עבודה חיצונית / אנרגיית עיבורים, עם נפח מותר של 10%, מתקבלת תוצאה של 4.326e5. בכדי לבצע השוואה הוגנת בין ההליכים, ערך זה משמש כגבול המותר c^* בהליך מינימיזציה של נפח. התכן המתקבל בניסוח מינימיזציה של נפח מוצג באיור 2. פירוט חלקי של התוצאות החישוביות וזמני החישוב מוצג בטבלה 1. ניתן לראות שמבחינת איכותית, התכן האופטימלי המתקבל בשני הניסוחים דומה מאד ומייצג את איזון דומה בין קשיחות למשקל. עם זאת, הליך מינימיזציה של נפח המוצע בעבודה זו, עם שימוש חוזר בהתניה מוקדמת מסוג MGCG, דורש זמן חישוב של כמחצית מהזמן הנדרש להליך מינימיזציה של עבודה חיצונית / אנרגיית עיבורים המבוסס על פותרן MGCG. יתרה מזאת, זמן החישוב נמוך בכמעט 80% מהזמן הנדרש כאשר משתמשים בפותרן סטנדרטי יותר – PCG עם התניה מוקדמת מסוג Incomplete Cholesky.

סיכום ומסקנות

בעבודה זו הוצע הליך חישובי יעיל לאופטימיזציה טופולוגית של מבני רציפים. מטרת המחקר הינה להציע גישה חישובית אפקטיבית אשר תאפשר הטמעה של אופטימיזציה טופולוגית תלת-ממדית בתוכנות תיב"ם. הנקודה המרכזית בהשגת היעילות החישובית היא ניצול של תכונות של התניה מוקדמת "קשיחה" אשר נחשפו בהקשר של אנליזה חוזרת. ניתן לראות ששילוב של שימוש חוזר בהתניה מוקדמת מסוג MGCG ביחד עם הליך מינימיזציה של נפח מביא להליך יעיל יותר מאשר הגישה המקובלת של מינימיזציה של עבודה חיצונית תחת אילוץ נפח.



איור 2 – טופולוגיית הגשר המתקבלת לאחר 50 איטרציות תכן בהליך מינימיזציה של נפח עם אנליזות חוזרות. זמן החישוב הכולל ב- MATLAB הוא כ- 176 שניות, כמחצית מזמן החישוב של ההליך המקביל של מינימיזציה לאנרגיית העיבורים

Procedure	Objective	Constraint	MGCG / PCG iter.	MATLAB time
MGCG-based minimum compliance	$f_c = 4.326 \cdot 10^5$	$V^* = 0.1 \cdot V$	2,168	354.78
Recycled MGCG-based minimum volume	$f_v = 0.0968$	$c^* = 4.326 \cdot 10^5$	346	176.12
IC-PCG-based minimum compliance	$f_c = 4.280 \cdot 10^5$	$V^* = 0.1 \cdot V$	11,960	784.21

טבלה 1 – תוצאות וזמני חישוב של 50 איטרציות תכן של מבנה גשר תלת-ממדי

מראי מקום

1. Kirsch, U. Reduced basis approximations of structural displacements for optimal design. *AIAA journal,* **29**:1751-1758 (1991).
2. Amir, O.; Bendsøe, M. P. & Sigmund, O. Approximate reanalysis in topology optimization. *IJNME* **78**:1474-1491 (2009).
3. Kirsch, U.; Kočvara, M. & Zowe, J. Accurate reanalysis of structures by a preconditioned conjugate gradient method. *IJNME* **55**:233-251 (2002).
4. Amir, O. Revisiting approximate reanalysis in topology optimization: on the advantages of recycled preconditioning in a minimum weight procedure. *SMO*, online (2014).
5. Amir, O., Aage, N., & Lazarov, B. S. On multigrid-CG for efficient topology optimization. *SMO* **49**:815-829 (2014).