עלון אישח"מ

עלון האיגוד הישראלי לשיטות חישוביות במכניקה

ספטמבר 2011 מספר 25

מ-"שולחן העורך":

ראשית, שנה טובה, שנת הצלחות ורעיונות חדשים וברוכים, ושנת עשייה והתחדשות.

זהו העלון השני ב-2011, וברצוני לשוב ולעודד אתכם לשלוח אלי רעיונות לכתבות, נושאים שהייתם מעוניינים שיופיעו, או תגובות לפרסום על כתבות שכבר הופיעו בעבר. את החומר נא שלחו אלי לכתובת האלקטרונית. ניתן ורצוי לצרף ציורים ותמונות. ניתן גם לפרסם חומר מסחרי-פרסומי בתשלום.

בהזדמנות זו ברצוני להודות למר אורי אלבוחר ולפרופ' יצחק הררי מאונ' ת"א על המאמר שהכינו והמובא בעלון זה. המאמר מבוסס על הרצאתו של מר אלבוחר ב–ISCM-30 שנערך באביב באונ' ת"א.

אנא בקרו באתר האגוד http://www.iacmm.org.il, בו תמצאו מידע על האיגוד ועל מכניקה חישובית בארץ ובעולם. באתר תוכלו לצרף עצמכם (ללא תשלום) לרשימת התפוצה האלקטרונית. באתר תוכלו גם להרשם כחברים באגוד או לחדש את חברותכם. טופס רישום עם פרטים מלאים ניתן למצוא ב- http://www.iacmm.org.il/member.

ISCM-31

יום העיון ה-31 יתקיים ב-27 באוקטובר, 2011, באוניברסיטת בן-גוריון בבאר-שבע. יום זה יהיה הפעם גדוש בהרצאות – 11 הרצאות + הרצאה מוזמנת מאורח בארה"ב. פרטים – ראו באתר האגוד ובהודעות לתפוצה.

שיטת ה-AWE לפתרון ישיר של בעיות הופכיות באלסטיות בעיבור מישורי בלתי דחיס

אורי אלבוחר ויצחק הררי

הפקולטה להנדסה, אוניברסיטת תל-אביב, רמת-אביב. urialbocher1@gmail.com

מבוא

הכינוי "בעיות הופכיות" מקורו בהיפוך הסדר בין נתוני הבעיה לפתרונה בהשוואה לבעיות קונבנציונליות. במרבית הבעיות בפיסיקה אנו מעוניינים למצוא את תגובתו של גוף מסוים לעומסים חיצוניים כאשר תכונותיו ידועות. בבעיות הופכיות לעומת זאת התכונות אינן ידועות, והמטרה היא מציאתן בהתבסס על מדידת התגובות לעומסים החיצוניים. בעיות הופכיות קיימות בתחומים רבים בפיסיקה. בגיאופיסיקה לדוגמא, טומוגרפיה סיסמית משמשת להדמיית מבנה כדור הארץ. נתוני הבעיה ההופכית הם

מדידות זמני הגעת הגלים האלסטיים, ופתרונה כולל מאפיינים כגון צפיפות ומהירות הגל בחומר. בתחום של הדמיה רפואית, מיוצרות תמונות של אזורים שונים בגוף למטרות אבחון. דרך אחת לעשות זאת היא באמצעות מדידת שדה ההזזות הנוצר ברקמה כתגובה ללחץ חיצוני עדין, ובעזרת שדה הזזות זה לפתור בעיה הופכית עבור התכונות המכאנית שלה, לדוגמא, מודול הגזירה. מתמונת התפלגות ערכי מודול הגזירה, ניתן ללמוד אודות פתולוגית הרקמה.

פתרון של בעיות הופכיות

בהינתן שדה המדידות, למשל שדה הזזות, ניתן לגשת לפתרון הבעיה ההופכית. מרבית הבעיות ההופכיות נפתרות באמצעות שיטות איטרטיביות. כאן הבעיה מנוסחת כבעיית אופטימיזציה לא ליניארית כאשר המטרה היא למצוא את התפלגות תכונות החומר שעבורה ההפרש בין שדה ההזזות שנמדד לשדה ההזזות המתקבל מפתרון משוואת שיווי המשקל (עם המודל הקונסטיטוטיבי המתאים ועם אותם ערכי עומסים חיצוניים שישמשו ליצירת שדה ההזזות המדוד) הוא מינימאלי. תהליך זה כולל ניחוש ראשוני של התפלגות תכונות החומר, פתרון משוואת שיווי המשקל, והשוואת פתרון שדה ההזזות המתקבל לשדה ההזזות המדוד. במידה וההפרש בין שדה הזזות המחושב לשדה המדוד אינו קטן מספיק, חוזרים על התהליך החישובי עם התפלגות מעודכנת של תכונות חומר, עד אשר נמצאת ההתפלגות שתתן את ההפרש המבוקש. מספר האיטרציות הדרוש עד לקבלת ערך קטן מספיק עשוי להיות גדול מאד – ובהתאם העלות החישובית. מצד שני, שיטה זו נחשבת רובסטית מאד בשל רגישותה הנמוכה יחסית לרעש במדידות והתאמתה למקרים בהם שדה ההזזות נמדד רק באופן חלקי.

במקרים בהם נמדד שדה ההזזות באופן מלא בתחום, ניתן לגשת לפתרון הבעיה בצורה ישירה. כאן למעשה פותרים את משוואה שיווי המשקל עצמה, אך במקום לנחש את תכונות החומר ולפתור עבור שדה ההזזות כפי שנעשה בשיטה האיטרטיבית, מציבים את שדות ההזזות המדודים במשוואה, ופותרים אותה ישירות עבור תכונות החומר. פה אין תהליך איטרטיבי, ופתרון המשוואה נותן את התפלגות תכונות החומר באופן מיידי. יתרונה המובהק של שיטה זו היא המהירות הרבה בה מתקבל הפתרון. בצד החסרונות, ניתן למנות את העובדה שהיא מחייבת מדידת שדה הזזות מלא, וכמו כן את רגישותה הגבוהה יחסית לרעש במדידות.

בבואנו לפתור בעיה הופכית, יש ראשית לוודא כי אכן קיים לבעיה פתרון, ושפתרון זה יחיד. לדוגמא, מתברר כי בבעיה של מאמץ מישורי בלתי דחיס ובהינתן שדה הזזות בודד, ניתן למצוא את מודול הגזירה רק עד כדי הכפלה בקבוע שרירותי. לכן, עם מנת לקבוע את הפתרון באופן סופי יידרש תנאי כיול. הבעיה של עיבור מישורי בלתי דחיס מורכבת עוד יותר. כאן מתברר, שמדידה בודדת של שדה ההזזות תותיר את הפתרון הכללי למודול הגזירה במונחים של פונקציות שרירותיות – כלומר פתרון חסר ערך. עם זאת, הוספת מדידה נוספת של שדה הזזות (שהגיעה למשל משדה עומסים אחר על הגוף) בו הכיוונים הראשיים של העיבורים שונים מאלו שהתקבלו במדידה הראשונה, תצמצם את כלליות הפתרון לארבעה קבועים שרירותיים לכל יותר. במקרה כזה ארבעה תנאי כיול יאפשרו שחזור של מודול הגזירה בתחום. את תנאי הכיול ניתן לקבל מתוך תת-תחום בו ידועות תכונות החומר הנקרא תחום הכיול. בהקשר של הדמיה רפואית, תחום הכיול עשוי להיות למשל אזור חשוף בגוף כגון העור, שאת תכונותיו ניתן למדוד ישירות.

שיטת AWE

שיטת ה- AWE (adjoint weighted equation) היא שיטה וריאציונלית שפותחה לפתרון ישיר של בעיות הופכיות. השיטה הוצעה לראשונה לפתרון בעיות של הולכה תרמית [1], הורחבה לבעיות על מאמץ מישורי בלתי דחיס [2], ובהמשך קיבלה ניסוח לבעיות כלליות באלסטיות [3]. לשיטה מספר יתרונות בהשוואה לשיטות פתרון אחרות. ראשית אין השיטה מחייבת תנאי התאמה מחמיר על שדות העיבורים הקיים בצורה החזקה של המשוואה. תנאי זה מופר מיידית בנוכחות רעש [4], והופך למעשה את הצורה החזקה להיות לא מעשית. כמו כן, השיטה מאפשרת שילוב של מספר מדידות, ואינה נוטה להיות דיפוסיבית בנוכחות גרדיאנטים גבוהים כמו למשל שיטת הריבועים הפחותים (Least-Squares).

פתרון בעיית העיבור המישורי הבלתי דחיס בעזרת שיטת AWE

כפי שצוין, בעיית העיבור המישורי הבלתי דחיס מחייבת מדידה של שני שדות הזזות על מנת לקבל פתרון המוגדר במונחים של 4 קבועים שרירותיים בלבד. ניסוח שיטת ה-AWE בהינתן שני שדות עיבורים (המתקבלים משני שדות הזזות שנמדדו) כולל מציאת פילוג מודול גזירה μ ושני שדות לחצים p_1 ו-p_2 כך שיתקיימים:

$$\begin{aligned}(2\boldsymbol{\epsilon}_1\nabla w_1, -\nabla p_1 + \nabla\cdot(2\mu\boldsymbol{\epsilon}_1) + (2\boldsymbol{\epsilon}_2\nabla w_1, -\nabla p_2 + \nabla\cdot(2\mu\boldsymbol{\epsilon}_1)) &= 0\\ (-\nabla w_2, -\nabla p_1 + \nabla\cdot(2\mu\boldsymbol{\epsilon}_1)) &= 0\\ (-\nabla w_3, -\nabla p_2 + \nabla\cdot(2\mu\boldsymbol{\epsilon}_2)) &= 0\end{aligned}$$

על מנת לקבע את הפתרון, יש לאכוף ארבעה תנאי כיול שאותם ניתן לקבל מתוך תחום הכיול. לניסוח הוריאציונלי אכיפת תנאים נקודתיים אינה מתאימה ולכן נשתמש בתחום הכיול ליצירת תנאי כיול אינטגראליים. לדוגמא, ניתן לדרוש כי הפתרון יקיים ערך ממוצע בתחום, וכן ייצר "מומנטים" ביחס לצירים:

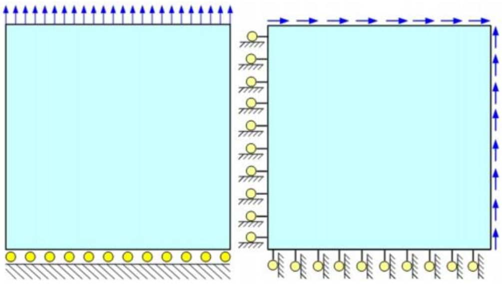
$$\begin{aligned}\int_{\Omega^{\mathrm{cal}}}\mu\,d\Omega &= \int_{\Omega^{\mathrm{cal}}}\bar{\mu}\,d\Omega\\ \int_{\Omega^{\mathrm{cal}}}x\mu\,d\Omega = \int_{\Omega^{\mathrm{cal}}}x\bar{\mu}\,d\Omega,\qquad \int_{\Omega^{\mathrm{cal}}}y\mu\,d\Omega &= \int_{\Omega^{\mathrm{cal}}}y\bar{\mu}\,d\Omega\\ \int_{\Omega^{\mathrm{cal}}}(x^2+y^2)\mu\,d\Omega &= \int_{\Omega^{\mathrm{cal}}}(x^2+y^2)\bar{\mu}\,d\Omega\end{aligned}$$

כאן Ω^{cal} מייצג את תחום הכיול, ו-$\bar{\mu}$ היא התפלגות מודול הגזירה הנתונה בתחום הכיול. אכיפת תנאי הכיול ניתנת לביצוע במספר דרכים. לדוגמא, מאחר ואנו מחפשים פתרון הומוגני, ניתן למצוא את הווקטורים הסינגולאריים השייכים ל- Null-space של הפתרון, ולהרכיב קומבינציה ליניארית מתאימה כך שתקיים את תנאי הכיול. חלופה נוספת היא אכיפת התנאים באמצעות כופלי לגראנז'.

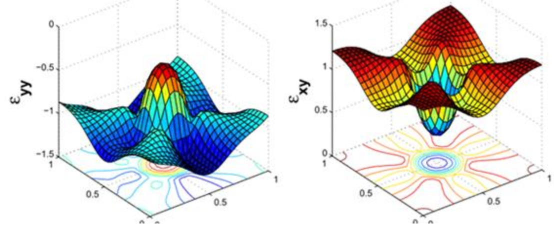
בעיית Inclusion

בחלק זה נדגים שחזור תכונות חומר (מודול גזירה) של בעיית עיבור מישורי בלתי דחיס בעזרת שיטת ה-AWE. הבעיה שנבחרה היא בעיית inclusion, כלומר בעיה בה חומר מסוג אחד מוקף בחומר אחר. בעיות אלו מתעוררות לעיתים קרובות בהקשרים רפואיים, כאשר בחלק מרקמה מסוימת חלים שינויים פתולוגיים עקב מחלה. דוגמא

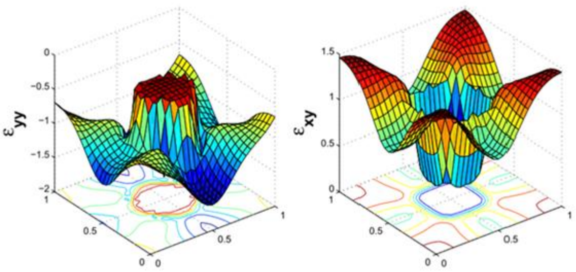
קלאסית הינה גידולים, במיוחד ממאירים, שתכונותיהם המכאניות שונות מאוד מאלו של הרקמה הסובבת.
התחום בו תיפתר הבעיה הינו ריבוע היחידה. הריבוע עשוי חומר הומוגני, למעט אזור עגול במרכז שבו תכונות החומר שונות. שתי בעיות תיפתרנה. בראשונה מודול הגזירה ישתנה בהדרגה מהערך בממשק עם הריבוע ועד מקסימום הגבוה פי חמש ממנו. בבעיה השנייה מודול הגזירה בתוך העיגול יהיה קבוע וגדול פי חמש מזה שבריבוע. בעיה זו צפויה להיות קשה יותר לפתרון, שכן באזור הממשק אין רציפות בתכונות.
את שתי "המדידות" אנו בוחרים לייצר באופן סינטטי מסיבות פרקטיות. במקום לבצע מדידות הזזות על דגם פיסי אנו פותרים את בעיית האלסטיות הרגילה על רשת של 52×52 אלמנטים ריבועיים בילינאריים כאשר תכונות החומר ידועות בכל התחום, ומקבלים שדה הזזות. לשדה ההזזות אנו מבצעים downsampling לרשת של 26×26 וממנו בעזרת הטלת L_2, מקבלים את שדות עיבורים. איור 1 מציג את העומסים (הזזות שפה) שנבחרו ואיורים 2 ו-3 מציגים את העיבורים שהתקבלו כאשר ההשתנות בתכונות החומר רציפה וכשאיננה רציפה - בהתאמה. אלו הם נתוני הבעיה ההופכית.



איור 1: תנאי שפה ליצירת שני שדות הזזות בלתי תלויים. תנאי שפה משיקיים (ימין) ותנאי שפה ניצבים

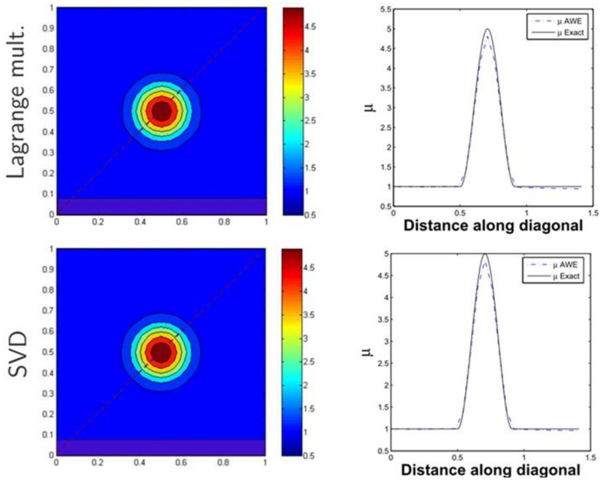


איור 2: שדות העיבורים המתקבלים מפרופיל תכונות חומר המשתנה באופן רציף. עיבורים כתוצאה מתנאי שפה משיקים (ימין) ותנאי שפה ניצבים (שמאל).

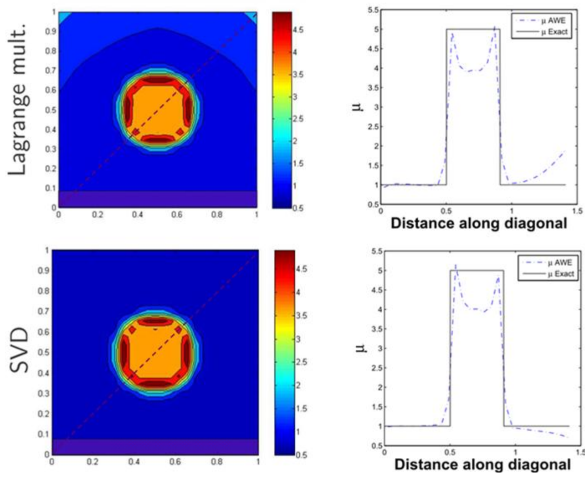


איור 3: שדות העיבורים המתקבלים מפרופיל תכונות חומר המשתנה באופן בלתי רציף. עיבורים כתוצאה מתנאי שפה משיקים (ימין) ותנאי שפה ניצבים (שמאל).

איורים 4 ו-5 מציגים את פתרונות הבעיה ההופכית שהתקבלו בשיטת ה-AWE כאשר תנאי הכיול נאכפו באמצעות כופלי לגראנז', ובאמצעות SVD. תחום הכיול נבחר להיות בתחתית הריבוע ובגובה של 1/12. ניתן לראות כי כאשר תכונות החומר משתנות באופן רציף, השחזור מדויק מאד. כאשר ישנה קפיצה בתכונות החומר, השחזור כבר אינו מושלם אם כי עדיין ניתן לזהות בבירור את מיקום ה-inclusion ואת צורתו.

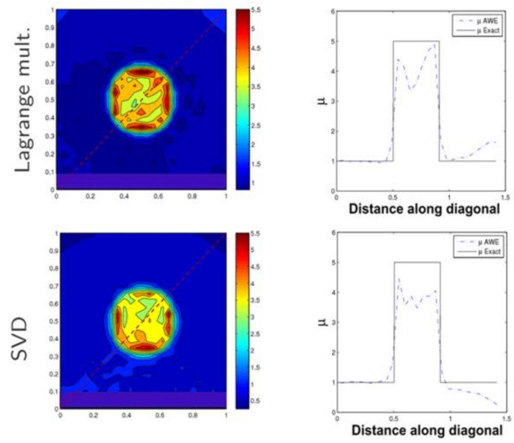


איור 4: פתרון הבעיה ההופכית עבור הפרופיל הרציף. מוצג בכל התחום כמפה טופוגרפית (איורים צבעוניים) ולאורך חתך אלכסוני. הפס שבתחתית האיור הצבעוני מייצג את תחום הכיול.



איור 5: פתרון הבעיה ההופכית עבור הפרופיל הבלתי הרציף. מוצג בכל התחום כמפה טופוגרפית (איורים צבעוניים) ולאורך חתך אלכסוני. הפס שבתחתית האיור הצבעוני מייצג את תחום הכיול.

בעיות אמיתיות מלוות תמיד בכמות מסוימת של רעש. על מנת לבחון את ביצועי שיטת ה AWE בתנאים אמיתיים יותר בחרנו להוסיף רעש גאוסיאני לבן של 10% לשדות העיבורים. איור 6 מציג את אותן הבעיות אך הפעם בשילוב עם רעש. ניתן לראות כי למרות שישנה פגיעה מסוימת בדיוק, השחזור נותר ברור למדי.
לסיכום, שיטת ה AWE מטפלת בהצלחה בבעיות של מאמץ מישורי בלתי דחיס אפילו כאשר ישנה אי רציפות בתכונות החומר וכן בנוכחות רעש.



איור 6: הוספת רעש גאוסיאני לבן של 10% לשדות העיבורים. פתרון הבעיה ההופכית בכל התחום כמפה טופוגרפית (איורים צבעוניים) ולאורך חתך אלכסוני.

Bibliography

1) P.E. Barbone, A.A. Oberai, I. Harari, Adjoint-weighted variational formulation for direct solution of inverse heat conduction problem, *Inverse Problems* **23** (2007) 2325–2342.
2) U. Albocher, A. A. Oberai, P. E. Barbone, I. Harari, Adjoint-weighted equation for inverse problems of incompressible plane-stress elasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **198** (30-32), (2009), 2412–2420.
3) Paul E. Barbone, Carlos E. Rivas, Isaac Harari, Uri Albocher, Assad A. Oberai, Sevan Goenzen, Adjoint-weighted variational formulation for the direct solution of plane stress inverse elasticity problems, *Journal of Physics: Conference Series* **135** (2008).
4) Paul E. Barbone, Assad A. Oberai, Elastic modulus imaging: some exact solutions of the compressible elastography inverse problem, *Physics in Medicine and Biology*, **52** (2007) 1577–1593.