עלון

אישח"מ

עלון האיגוד הישראלי לשיטות חישוביות במכניקה

ספטמבר 2008 מספר 20

אתר אישח"מ (IACMM) באינטרנט: http://www.iacmm.org.il
רישום לחברות באגוד ופרטים נוספים: באתר האגוד הנ"ל, או פנו למזכיר-גזבר,
ד"ר עמנואל אור, טל. 9908640 (04), פקס 9908164 (04), דואר אלקטרוני: emanuelo@rafael.co.il

---

הערות העורך:

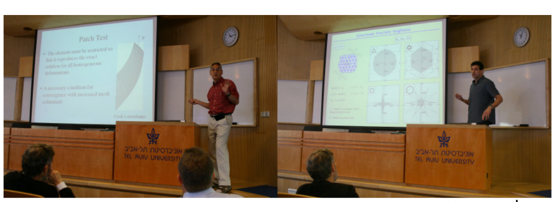
נא שלחו לכתובת המערכת (בדואר אלקטרוני או רגיל) חומר לפרסום בעלון. ניתן ורצוי לצרף ציורים ותמונות. לידיעת חברות: ניתן גם לפרסם חומר מסחרי- פרסומי בתשלום. לפרטים נא לפנות למערכת.

אנא בקרו באתר האגוד http://www.iacmm.org.il, ותמצאו מידע רב על האיגוד ועל מכניקה חישובית בארץ ובעולם. באתר תוכלו לצרף עצמכם (ללא תשלום) לרשימת התפוצה האלקטרונית. שם תוכלו גם להרשם כחברים באגוד או לחדש את חברותכם. טופס רישום עם פרטים מלאים ניתן למצוא באתר http://www.iacmm.org.il/member.

ISCM-24

יום העיון ה-24 התקיים ב-3.4.08 באוניברסיטת תל אביב. המארגנים המקומיים היו אלכסנדר גלפגט וסלבה קרילוב. אנו מודים לאוניברסיטת ת"א, לפקולטה להנדסה ולביה"ס להנדסה מכנית על התמיכה הנדיבה. יום העיון היה מוצלח מאד ונפתח בהרצאה המוזמנת המאלפת של פרופ' Jacob Fish מאוניברסיטת Rensselaer Polytechnic Institute (RPI) על מערכת תכן רבת-סקאלות. ראו תמונה משמאל. לאחר ההרצאה המוזמנת ניתנו 8 הרצאות נוספות בנושאים שונים, ביניהן הרצאה המפתח של אלכס יחוט מאונ' בן-גוריון. ראה משמאל תמונות מהרצאותיהם של פ. ליפרמן, ומ. רובין. את יום העיון חתם זהר יוסיבאש בלומדה על "ביו-מכניקה חישובית" שריתקה את הקהל.

פרופ' Jacob Fish בהרצאה מוזמנת ביום העיון ה-24



פ. ליפרמן (מימין) ומ. רובין בהרצאות ביום העיון ה-24

ISCM-25

יום העיון ה-25 יתקיים ב-23.10.08 באוניברסיטת בן-גוריון בנגב. המארגנים המקומיים הם זהר יוסיבאש וארז גל. אנו מודים לאוניברסיטת בן-גוריון, לפקולטה להנדסה ולרקטור האוניברסיטה על התמיכה הנדיבה. ראו פרטים באתר האגודה על תוכנית הכנס, המבטיחה להיות מרתקת.

עמידה במבחן הטלאי והאלסטיות: נקודת קוסרה ואלמנטים סופיים

מחמוד ג'בארין

ETH ציריך והפקולטה להנדסה אזרחית וסביבתית, טכניון

mahmood.jabareen@imes.mavt.ethz.ch

מיילס רובין

הפקולטה להנדסת מכונות, טכניון

mbrubin@techunix.technion.ac.il

מבוא

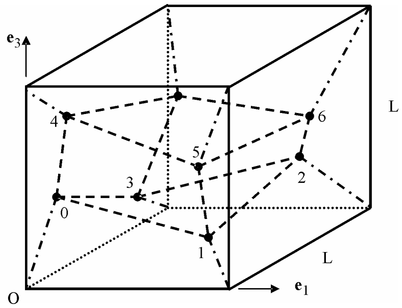
מחקר בטכנולוגיית אלמנטים סופיים מתמקד בניסוחים שמשפרים את הדיוק (accuracy) של האלמנט מצד אחד ושומרים על חסינותו (robustness) מצד שני. אי לכך, מספר ניסוחים הוצעו בספרות כדי לשפר את התנהגותו של האלמנט שמבוסס על עקרון האינטגראציה המלאה (Full integration). ידוע שאלמנט זה הינו חסין אבל התגובה שלו "נעולה" כאשר מדובר במידול דפורמציות כפיפה או במידול חומרים בלתי דחיסים. מבין הניסוחים האלו ניתן למנות את הניסוח המעורב, הניסוח המבוסס על אינטגראציה מצומצמת עם ייצוב המודים הפרזיטים והניסוח המבוסס על השבחת (enhancing) שדה העיבורים.

לאחרונה הוצעה גישה חדשה לפורמולציה של אלמנטים סופיים. פורמולציה זו [1], שהוכללה בעבודה [2], מבוססת על התיאוריה של נקודת קוסרה (Cosserat). בתיאוריה של נקודת קוסרה האלמנט נחשב למבנה אשר עבורו צריך לנסח פונקצית אנרגיית עיבורים אשר כוללת מרכיב חומרי ביחד עם התכונות הגיאומטריות של האלמנט. הכוחות בצמתים מחושבים ע"י נגזרות אנרגיה זו, דבר שמבטיח מראש שהאלמנט יהיה היפר-אלסטי. לכן אין ולא יהיה שום צורך באינטגרציה על התחום של האלמנט.

בכתבה זו נדון בשתי דרישות בסיסיות שפורמולציה של אלמנט סופי אמורה לקיים. הדרישה הראשונה הינה קיום מבחן הטלאי (patch test), ואילו הדרישה השנייה הינה תגובה היפר-אלסטית כאשר ממדלים חומר היפר-אלסטי. **נראה שבניגוד לפורמולציה של נקודת קוסרה, אלמנטים סופיים מסוימים אינם מקיימים דרישות אלו!** לצורך הדגמה זו נבחרו אלמנטים אשר מבוססים על ניסוח השבחת שדה העיבור (Enhanced strain) ואשר מיושמים בתוכנות מסחריות כמו ABAQUS, ADINA, ANSYS.

מבחן הטלאי

מבחן הטלאי נחשב אחד המבחנים החשובים ביותר שעל אלמנט סופי מוצע חדש לעבור. בלשון רופפת ניתן לומר כי מעבר של מבחן זה מבטיח שהאלמנט יכול לייצג במדויק (exactly) את הפתרונות הבסיסיים ביותר. למשל, באנליזה אלסטית האלמנט נדרש לייצג במדויק מצב של עיבורים קבועים. על מנת לבצע את המבחן, מגדירים טלאי (patch) קטן של אלמנטים, מכתיבים את הפתרון (התזוזות) המתאים למצב של עיבורים קבועים בחלק מדרגות החופש, ובודקים אם הפתרון המתקבל ביתר דרגות החופש הוא אכן הפתרון המדויק. דוגמה לטלאי באלסטיות תלת-מימדית מתוארת באיור 1.



איור 1: דוגמה לטלאי של אלמנטים המשמש למבחן הטלאי.

מבחן התגובה האלסטית

חומר היפר-אלסטי (שהוא הגירסה הלא-לינארית של חומר אלסטי) מאופיין ע"י שתי התכונות הבאות: (א) המאמצים הינם אך ורק פונקציה של העיבורים; (ב) העבודה הנעשית ע"י המאמצים בין שני מצבים איננה תלויה במסלול המחבר בין שני המצבים. למשל, אם אנו מעמיסים גוף אלסטי בשני כוחות, התגובה הסופית (הסטטית) של הגוף אינה מושפעת מהשאלה האם הפעלנו קודם את הכוח הראשון, או את הכוח שני, או את שניהם בו-זמנית.

כאשר מוצע אלמנט סופי לשימוש לאנליזה היפר-אלסטית, סביר לדרוש ממנו כמובן לקיים את תכונות (א) ו-(ב), כלומר להתנהג בצורה היפר-אלסטית. למרבית הפלא, ישנם בשימוש אלמנטים סופיים שאינם מקיימים תכונה זו, כפי שנראה להלן.

אלמנט נקודת קוסרה

הקינמאטיקה של אלמנט נקודת קוסרה בעל שמונה צמתים מאופיינת ע"י שמונה דירקטורים כלהלן:

$$\mathbf{D}_i \;,\mathbf{d}_i \qquad , \qquad i=0,1,...,7 \tag{1}$$

כאשר $\mathbf{D}_i$ ו- $\mathbf{d}_i$ הינם הדירקטורים שמתארים את קונפיגורצית הייחוס (לפני הדפורמציה) וההווה (לאחר הדפורמציה), בהתאמה. יש לציין שהדירקטורים הנ"ל מתקבלים מתוך העתקה חד-חד ערכית של הדירקטורים שמתרים את מיקום הצמתים בשתי הקונפיגורציות ($\bar{\mathbf{D}}_i$ ו- $\bar{\mathbf{d}}_i$, בהתאמה). להשלמת התיאור הקינמטי יש צורך בהגדרת גרדיאנט הדפורמציה הממוצע באלמנט ($\bar{\mathbf{F}}$), כלהלן:

$$\mathbf{F}=\sum_{i=1}^{3}\mathbf{d}_i\otimes\mathbf{D}^i \;,\quad \boldsymbol{\beta}_i=\mathbf{F}^{-1}\mathbf{d}_{i+3}-\mathbf{D}_{i+3} \;,\quad i=1,...,4$$
$$\bar{\mathbf{F}}=\mathbf{F}\left[\mathbf{I}+\sum_{i=1}^{4}\boldsymbol{\beta}_i\otimes\mathbf{V}^i\right] \;,\quad \bar{\mathbf{C}}=\bar{\mathbf{F}}^T\bar{\mathbf{F}} \tag{2}$$

הכוחות הפנימיים באלמנט יחושבו מהנגזרות של פונקצית אנרגית העיבורים $\Sigma\left(\bar{\mathbf{C}},\boldsymbol{\beta}_i\right)$, שהינה פונקציה של העיבורים הממוצעים באלמנט ($\bar{\mathbf{C}}$), והעיבורים הלא-הומוגניים ($\boldsymbol{\beta}_i$). בעבודה [1] הוצע להפריד את פונקצית אנרגית העיבורים לשני חלקים:

$$\Sigma\left(\bar{\mathbf{C}},\boldsymbol{\beta}_i\right)=\Sigma^*\left(\bar{\mathbf{C}}\right)+\Psi\left(\boldsymbol{\beta}_i\right) \tag{3}$$

כאשר החלק הראשון (האיבר הראשון מימין) יתואר ע"י אנרגיית עיבורים תלת מימדים (כלשהי) של חומר היפר-אלסטי, והחלק השני (האיבר השני מימין) נתון ע"י פונקציה ריבועית של העיבורים הלא-הומוגניים. **הצורה הפונקציונאלית (3) של האנרגיה מבטיחה את קיום מבחן הטלאי לנקודת קוסרה.**

לתאור מלא של פורמולצית נקודת קוסרה ניתן לעיין ב- [2], [1].

תוצאות של מבחן הטלאי

באיור מס' 1 מתוארת קובייה המהווה את הטלאי בו השתמשנו לצורך מבחן הטלאי. הפינות של הקובייה החיצונית חסומות בכל הכיוונים, ועל הקובייה מופעל שדה הזזה אשר מתאר עיבור חד צירי בכוון $\mathbf{e}_3$. נסמן ב- λ את הגודל המאפיין את המתיחה (stretch). החוק הקונסטיטוטיבי של החומר הוא ניאו-הוקיאני (Neo-Hookean). המבחן בדק את השגיאה של רכיבי ההזזה של צומת 0 (ראה איור 1). כמובן שאלמנט העובר את המבחן צריך לתת שגיאה אפס.

למרות שניתן להראות באופן אנליטי שנקודת קוסרה מקיימת את מבחן הטלאי עבור אלמנט כללי בקונפיגורציית הייחוס, בדקנו את הקיום גם באופן נומרי. ע"י שינוי מקום הצמתים של האלמנט הפנימי (באיור 1) והשוואת הפתרון המדויק (עבור $\lambda = 20$) עם הפתרון הנומרי נמצא שנקודת קוסרה משחזרת את הפתרון המדויק.

השאלה של קיום מבחן הטלאי באלמנטים אשר מבוססים על עקרון השבחת העיבורים (Enhanced strains) נבדקת כאן למצב של עיבורים גדולים. האלמנטים שנבחרו מתוארים בטבלה מס' 1. הקובייה הועמסה למתיחה של $1 \le \lambda \le 2$. מהתוצאות נמצא שהאלמנט FP איננו מקיים את המבחן לאלמנטים שהינם מעוותים בקונפיגורציית הייחוס. הפתרון שהתקבל עבור AB, AD & AN הפסיק להתכנס עבור מתיחה של $\lambda \cong 1.8$ בגלל התפתחות ערכים עצמיים שליליים במטריצת הקשיחות. יש לציין שהאלמנט AD נתן פתרון מדויק למקרה של $\lambda > 1.8$ כאשר נבחרה האופציה של התעלמות מערכים עצמיים שליליים.

חישובים נוספים בוצעו על מנת להבין את בעיית חוסר ההתכנסות באלמנטים AB ו- AN. הקובייה הועמסה למתיחה של $\lambda = 1.6$ למשך זמן T_1 (שדה עומס), ולאחר מכן מתיחה זו נשארה קבועה לזמן T_2 : ראה איור 2(a). מספר הצעדים שנלקחו בשתי הפאזות היה N_1 ו- N_2 .

מהתוצאות הנראות באיור 2(b) ו-2(c) (כאשר נלקח $N_1 = N_2 = 50$), ניתן לראות שהאלמנטים AB ו- AN אינם מקיימים את מבחן הטלאי אף על פי שהמתיחה אשר הופעלה על הקובייה קטנה מזו שגרמה לחוסר ההתכנסות ($\lambda \cong 1.8$). יתרה מזו, עצם העובדה שחוסר היציבות של האלמנט מתרחש בפאזה השנייה של המתיחה עלולה להטעות את המשתמש מפני שהאלמנט חזה את הפתרון המדויק בפאזה הראשונה.

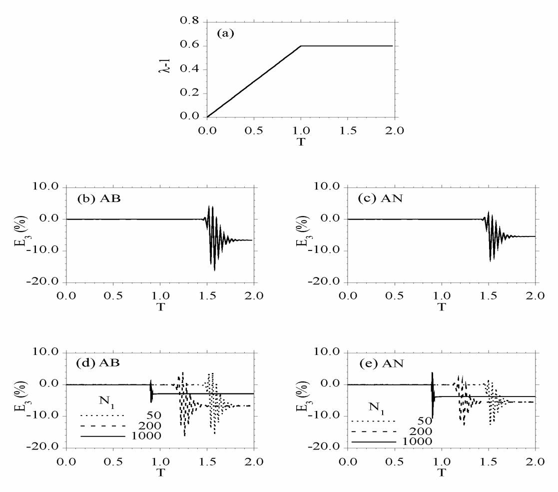
האם חוסר היציבות הוא נומרי או פיסיקלי? כדי לענות, נסתכל באיורים 2(d) ו-2(e) המראים תוצאות עבור שלושה ערכים שונים של מספר צעדים בפאזה הראשונה ($N_1 = 50,200,1000$). מתוך איורים אלו ניתן לראות שנקודת חוסר היציבות (הנקודה שבה הפתרון של האלמנט הסופי מפסיק להיות נכון) תלויה בערכו של N_1 . יתרה מזו, כאשר $N_1 = 1000$ חוסר היציבות מתרחש בפאזה הראשונה. המסקנה מכך היא שהתופעה הזו של חוסר היציבות הינה נומרית.

תוצאות של מבחן האלסטיות: מסלול עמיסה של קוביה

כפי שהוסבר לעיל, כאשר ממדלים חומר היפר-אלסטי, התגובה של האלמנט צריכה גם היא להיות היפר-אלסטית.

טבלה 1: אלמנטים שנבדקו בעבודה זו.

שם התוכנה	שם האלמנט	סימון
ABAQUS	Incompatible modes (C3D8I)	AB
ADINA	Incompatible modes	AD
ANSYS	Enhanced strains	AN
FEAP	Enhanced strains	FP

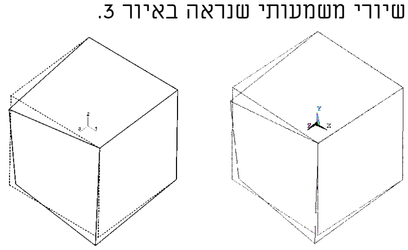


איור 2: התנהגות לא יציבה של אלמנטים AB ו-AN במבחן הטלאי.

משמעות אי-קיום דרישה זו היא שהניסוח מכיל איברים שאינם שומרים על היפר-אלסטיות, אבל כאשר בדיקה זו מתקיימת במקרה מסוים אין זה אומר שהאלמנט הינו היפר-אלסטי לכל משוואה קונסטיטוטיבית או לכל מסלול עומס. במלים אחרות, צריך להראות באופן אנליטי שהתגובה של האלמנט הינה היפר-אלסטית. **עבור נקודת קוסרה**, היות שהכוחות הפנימיים מתקבלים מנגזרת של פוטנציאל, **מובטח שהתגובה תהיה היפר-אלסטית**.

הדבר איננו פשוט בנוגע לניסוח אשר מבוסס על עקרון השבחת שדה העיבורים, במיוחד כאשר מדובר בקוד סגור, שאין גישה למשתמש לראות ולבדוק בו את הניסוח (באופן אנליטי). לכן נותר לבדוק זאת באופן נומרי. לצורך כך, נלקחה קובייה אלסטית. ארבעה מצמתיה הוגדרו כסגורים, שלושה כפתוחים, ובצומת השמיני הוכתב מסלול דפורמציה מסוים (להרחבה ניתן לעיין ב- [3]).

מהתוצאות נמצא שהאלמנטים AD ו- FP נותנים תגובה היפר-אלסטית למסלול הספציפי שנבחר, בעוד שתגובת האלמנטים AB ו- AN אינה היפר-אלסטית (אלא היפו-אלסטית). יתרה מזו, כאשר הופעלו שמונה מחזורים של אותו מסלול על האלמנטים AB ו- AN, התקבל עיוות שיורי משמעותי שנראה באיור 3.

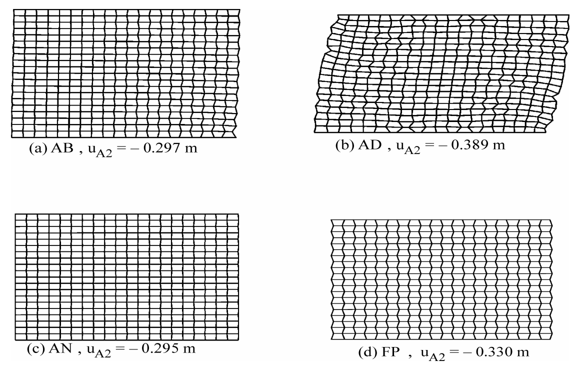


איור 3: עוות שיורי המתקבל במבחן ההיפר-אלסטי ע"י אלמנטים AB ו- AN.

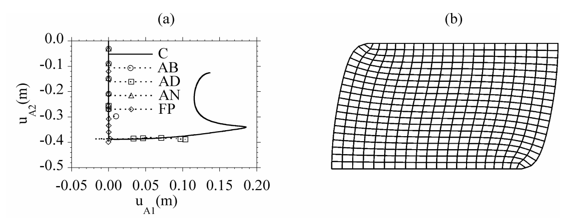
תוצאות של מבחן האלסטיות: קריסה של קיר

בדוגמה זו רצינו לבדוק אם האלמנטים AB, AD, AN ו- FP מסוגלים לפתור בעיה של קיר הקורס עקב עומס לחיצה

המופעל עליו בשפתו העליונה. בעיה זו הוצעה בספרות כדי לבדוק קיום מודים של שעון חול (Hourglassing) באלמנטים שמבוססים על השבחת שדה העיבורים במקרה של לחיצה גבוהה עם כפיפה. הקיר נמצא בין שתי פלטות קשיחות וחלקות (להרחבה ניתן לעיין ב- [3]). באיור 4 מתוארת צורת הדפורמציה ברגע בו האלמנטים AB, AD,AN ו- FP הפסיקו להתכנס, והראו מוד של שעון חול



איור 4: אי יציבות נומרית המתקבלת מהאלמנטים AB, AD, AN ו- FP.



איור 5: (a) עקום שיווי המשקל המתקבל מהניסוחים השונים, (b) צורת הדפורמציה שמתקבל מנקודת קוסרה (לפני ה- springback).

חמור. במיוחד האלמנטים AB, AN ו- FP הפסיקו להתכנס לפני נקודת הגבול (כלומר לפני הקריסה), כפי שניתן לראות באיור 5(a), ואילו האלמנט AD קרס בגזירה בזמן ההתעוררות של צורת שעון החול והחישובים הפסיקו לאחר נקודת הגבול. לעומת זו נקודת קוסרה הראתה את הקריסה בגזירה ולאחריה תופעה של spring-back (ראה איור 5(a)), וכל זה מבלי שיתעוררו מודים של שעון חול. צורת הדפורמציה (לפני ה- spring-back) שמתקבלת מנקודת קוסרה נראית באיור 5(b).

הבעת תודה: המחברים מודים לפרופ' R.L. Taylor על הפניית תשומת לבם לעובדה שהאלמנט של FEAP איננו מקיים את מבחן הטלאי כאשר האלמנט הינו מעוות בקונפיגורצית הייחוס שלו.

מקורות

[1] Nadler B, and Rubin MB, (2003) A new 3-D finite element for nonlinear elasticity using the theory of a Cosserat point, Int. J. Solids and Structures 40: 4585-4614.

[2] Jabareen M, Rubin MB (2008) A generalized Cosserat point element (CPE) for isotropic nonlinear elastic materials including irregular 3-D brick and thin structures. To appear in J. of Mech. of Materials and Structures.

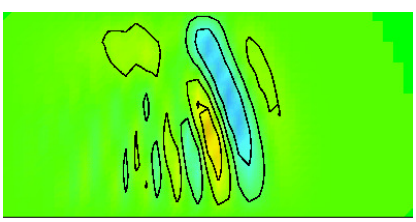
[3] Jabareen M, Rubin MB (2007) Hyperelasticity and physical shear buckling of a block predicted by the Cosserat point element compared with inelasticity and hourglassing predicted by other element formulations. Computational Mechanics, 40: 447-459.

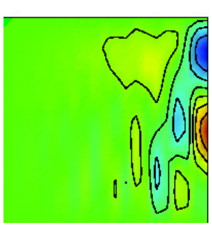
פינת השגיאה הקטנה

בגליון מס' 14 דנו ב**שגיאת המודל המתימטי**, בגליון 16 ב**שגיאת הדיסקרטיזציה**, בגליון 17 ב**שגיאת העיגול**, בגליון 18 ב**שגיאת ייצוג הנתונים**, ובגליון 19 ב**שגיאות זיהום**. בגליון זה נדון בקצרה ב**שגיאת שפת-קיטוע** של תחום אינסופי.

באפליקציות נומריות רבות יש לפתור בעיה המוגדרת מלכתחילה בתחום אינסופי. על סוג זה של בעיות נמנות בעית הזרימה סביב מטוס (התחום האינסופי הוא האויר שמסביב למטוס), אנליזה של רעידות אדמה (התחום שניתן מעשית להילקח כאינסופי הוא האדמה), והשדה האקוסטי סביב צוללת (התחום האינסופי הוא האוקיינוס). כאשר משתמשים בשיטות אלמנטים סופיים, הפרשים סופיים או נפחים סופיים יש להגדיר תחום חישובי סופי; לפיכך יש לקטוע את התחום האינסופי ולהגדיר שפה מלאכותית (שפת קיטוע) התוחמת את התחום החישובי. על השפה המלאכותית יש להגדיר תנאי שפה כלשהו המבטא את העובדה שהשפה היא "פתוחה". בדרך כלל הכתבת תנאי שפה על שפת הקיטוע כרוכה בשגיאה.

ניקח כדוגמה פשוטה בעיית זרימה תת-קולית סביב מטוס בטיסה ישרה. כרגיל נוח לחשוב על המטוס כנייח ועל הזרימה כמציפה את המטוס. לאחר שהגדרנו שפה מלאכותית במרחק מה מסביב למטוס אנו צריכים להגדיר עליה תנאי שפה. התנאי הפשוט ביותר שניתן להכתיב הוא שמהירות הזרימה על השפה היא מהירות הזרימה המציפה הנתונה באינסוף. ברור כי זהו קירוב, שיהיה טוב יותר ככל ששפת הקיטוע רחוקה יותר מן המטוס. אולם אם נציב את השפה רחוק מהמטוס, התחום החישובי יהיה גדול ונזדקק להרבה מאד נקודות רשת, מה שיוביל לחישוב לא יעיל. מצד שני אם נציב את שפת הקיטוע קרוב למטוס החישוב יהיה יעיל יותר אך אז שגיאת שפת-הקיטוע עלולה לזהם את הפתרון הנומרי. בעיה זו של תכן תנאי שפת-קיטוע הובילה למחקר רב שממשיך גם כיום, וניתן לקרוא עליו בספרות.





באיורים אנו רואים תוצאות של סימולציה של התפשטות גלים בתוך תעלה ארוכה. שני האיורים התחתונים מראים את הפתרון המחושב בתחום קצר פי שתים מהתחום המקורי. שפת הקיטוע היא השפה הימנית של התחום החישובי. האיור העליון מראה את הפתרון המדויק זמן קצר לאחר שהגל הגיע לשפה הימנית של התחום החישובי. האיורים המרכזי והתחתון מראים את הפתרונות המתקבלים כאשר על שפת הקיטוע משתמשים בתנאי שפה "פתוח" מתוחכם (מסדר גבוה) ופשוט מאד, בהתאמה. ניתן לראות את ההחזרות הכוזבות שהשפה מייצרת במקרה האחרון.