

## עלון האיגוד הישראלי לשיטות חישוביות במכניקה

מספר 35

אוקטובר 2016

**עורך:** אלעד פריאל, המחלקה להנדסת מכונות, המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון, באר-שבע 84100, טל. 6475884 (08), דואר אלקטרוני: eladp@sce.ac.il

**חברי ועד אישח"מ:** מיכאל אנגלמן, רמי בן-צבי, פנחס בר-יוסף, דן גבעולי, יצחק הררי, עמיאל הרשגה, יונתן טל (אחראי האתר), זהר יוסיבאש (נשיא), סלבה קרילוב (מזכיר-גזבר)

**איש-קשר עם ECCOMAS:** מישל ברקובייר

**ועדת ביקורת:** מחמוד ג'בארין ומרדכי סנטו

**אתר אישח"מ (IACMM) באינטרנט:** <http://www.iacmm.org.il>

**רישום לחברות באגוד ופרטים נוספים:** באתר האגוד הנ"ל, או פנו למזכיר-גזבר, פרופ' סלבה קרילוב, טל. 054-7746664, דואר אלקטרוני: [krylov@tauex.tau.ac.il](mailto:krylov@tauex.tau.ac.il)

### מ-"שולחן העורך":

אני מזמין את חברי האיגוד (ואת שאינם עדיין חברי האיגוד) לנתח את הבעיה המופיעה בסוף העלון ולשלוח אלי את התוצאות. המטרה היא להשוות בין התוצאות המכונסות של קבוצות חישוביות שונות.

ההשוואה בין התוצאות השונות תוצג באחד מעלוני אישח"מ הבאים.

אשמח לשמוע מכל אחד ואחת מחברי האיגוד בנוגע לתכנים אשר הם היו מעוניינים לראות מופיעים בעלון. אנא פנו אלי במייל בכל שאלה או הצעה.

אתם מוזמנים לבקר באתר האגוד בו תמצאו מידע על האיגוד ועל מכניקה חישובית בארץ ובעולם. באתר תוכלו לצרף עצמכם (ללא תשלום) לרשימת התפוצה האלקטרונית, להירשם כחברים באגוד או לחדש את חברותכם. טופס רישום לאיגוד ניתן למצוא ב- <http://www.iacmm.org.il/member>

### עדכונים מיום העיון הקודם:

יום העיון ה-40 נערך ב-7 באפריל באוניברסיטת תל אביב ואורגן ע"י פרופ' סלבה קרילוב ופרופ' יצחק הררי. האורח, Professor Djordje Peric מאוניברסיטת סוונסי באנגליה נתן הרצאת פתיחה מרתקת בנושא Strategies for fluid-structure interaction: algorithms and applications.

המציאות מלמדת שבעיות הנדסיות ושאלות מחקריות הן לרוב רב תחומיות. הרב תחומיות יכולה להתבטא בחוקי חומר התלויים בשדות מכאניים ותרמיים, או באינטראקציה בין השדות המכאניים לשדות אלקטרו-מגנטיים. הצימודים בין התופעות יכולים להיות חלשים כך שניתן לפתור כל שדה בנפרד ו"רק" להזין את התוצאות כתנאי התחלה או שפה לשדה השני או שהצימוד יכול להיות הדוק מה שמחייב פתרון מצומד של הבעיה. בכל מקרה, הרב תחומיות מציבה אתגר גדול בהיבטים של המכאניקה החישובית. בעלון הנוכחי מופיע מאמר מעניין הן ביציבות המכאנית של פלטה דקה תחת עומס אלקטרוסטטי. כאן המקום להודות למר ליאור מדינה על שהסכים לחבר את המאמר המופיע בהמשך העלון. בהזדמנות זו ארצה לברך את ליאור על בחירת ההרצאה שהעביר ביום העיון האחרון כהרצאה המצטיינת של יום העיון.

אחת השאלות המעניינות בבעיות רב תחומיות מצומדות היא השאלה של ביצוע אימות (Verification) למודל החישובי. האסטרטגיה הרווחת מבעיות אלסטיות לינאריות היא הגדלת מספר דרגות החופש ו/או הקטנת צעדי הזמן ובחינה של התכנסות הפתרון על ידי שימוש בפרמטרים גלובליים (אנרגיה פוטנציאלית או קינטיק) ובפרמטרים לוקאליים (תזוזה, מאמץ שקול). כאשר קיים צימוד הדוק בין תופעות פיסיקליות תהליך האימות איננו טריוויאלי. כאתגר לקהילת המכאניקה החישובית בארץ, בחרתי להציג בסוף העלון בעיית בוחן. בבעיה זו קיים צימוד בין שדות מכאניים לשדות תרמיים.

## חקר יציבות של פלטה עקולה קמורה זעירה תחת עומס אלקטרוסטטי

ליאור מדינה<sup>1</sup>, רבקה גילת<sup>2</sup> סלבה קרילוב<sup>1</sup>

1 - הפקולטה להנדסה מכנית, אוניברסיטת תל אביב

2 - המחלקה להנדסה אזרחית, אוניברסיטת אריאל

### הקדמה

מבנים דו-יציבים (bistable) כגון קורות, פלטות וקליפות יכולים להימצא בשתי תצורות יציבות תחת עומס זהה. המעבר בין מצב יציב אחד לשני מתואר כקריסת snap-through. התנהגות מבנים הנתונים לקריסה מסוג זה תחת עומס "מכני", הלא תלוי בהזזות, הינו נושא מבוסס במכניקה חישובית וממשיך למשוך את תשומת ליבם של חוקרים רבים [1].

הגישה המסורתית לקריסה כזו הייתה כאל כישלון שיש להימנע ממנו. עם התפתחות ההבנה כי אפשר לנצל את תופעת ה-snap-through במבנים לצורך שימושים שונים [2], התחדש העניין במכניקה של קורות [3,4] וקליפות [5,6] דו-יציבות. רכיבים כאלו משולבים במערכות מיקרו-אלקטרומכניות (MEMS/NEMS) המשמשות כמתגים, חיישנים, זיכרונות מכאניים ומיקרו משאבות. מתקנים כאלו מופעלים לעיתים קרובות ע"י כוח אלקטרוסטטי לא לינארי, התלוי בדפורמציה (עיוות) של המבנה, הגורם בהגיעו לערך קריטי, לאובדן יציבות מסוג נוסף, pull-in, כלומר קריסת הרכיב אל האלקטרודה. קריסת snap-through של רכיבים חד ממדיים, ובמיוחד קורות עקומות, תחת עומס אלקטרוסטטי סטטי ודינאמי, נחקרה באופן מקיף תוך שימוש בכלים אנליטיים, נומריים וניסיוניים. לאחרונה, מבנים דו ממדיים כמו ממברנות ופלטות תפסו במה מרכזית במחקר מבנים דו-יציבים וכמות גדולה של עבודות הוקדשה ללמידת התנהגות ה-pull-in שלהם. עם זאת, עבודות אלו התמקדו בפלטות שטוחות ואילו התנהגות של פלטה עקומה תחת עומס אלקטרוסטטי לא נחקרה עד כה. בניגוד לפלטות שטוחות, פלטות עקומות עשויות להיות דו-יציבות. בעבודה הנוכחית, אנו מציגים את ההתנהגות של פלטות דו-יציבות תחת עומס אלקטרוסטטי הגורם לאובדן יציבות משני הסוגים, snap-through ו-pull-in.

לעבודה הנוכחית שתי מטרות. האחת, לפתח מודל מקובץ, המסוגל לתאר את התנהגות הפלטה העקומה תחת עומס אלקטרוסטטי, ולבחון את אמינותו. השנייה הינה להדגים היתכנות להפעלת מיקרו פלטה בעלת ממדים ריאליים ע"י מתחים נמוכים יחסית.

### המודל

עבור מיקרו פלטה עקומה בעלת עקמומיות נמוכה (רדודה), כמוראה באיור 1, ניתן לפתח את משוואות שיווי המשקל על בסיס השערת Kirchoff, תוך שימוש בקשרי עיבור-הזזה לא לינאריים של von-Karman [7]. עבור פלטה עקומה אקסיסימטרית המועמסת על ידי כוח אלקטרוסטטי המשוואות המתקבלות הינן



ISC40 – פרופ' Djordje Peric מרצה.

במסגרת יום העיון אף הוענק פרס מטעם האיגוד לדר' איגור סוקולוב על חיבור דוקטורט מצטיין לשנת 2015. דר' סוקולוב ביצע את עבודות המחקר לדוקטורט בהנחייתם של פרופ' יצחק הררי ופרופ' סלבה קרילוב.



ISC40 – פרופ' זהר יוסיבאש נשיא האיגוד מעניק את הפרס לדר' איגור סוקולוב.

יום העיון היה מוצלח מאוד וכלל מספר רב של משתתפים מהאקדמיה ומהתעשייה.

### ISC41

יום העיון ה-41 יתקיים ב-27 באוקטובר 2016, במכללה האקדמית להנדסה ע"ש סמי שמעון, (המארגנים הם דר' ניר טרבילסי ודר' אלעד פריאל). המרצה המוזמן הוא **Prof Wolfgang Wall – Chair of Computational Mechanics – Technical University of Munich, Germany**. אשר ירצה בנושא: "Computational modeling of complex coupled phenomena in respiratory biomechanics". פרטים נוספים ניתן למצוא באתר האיגוד ובהודעות לתפוצה.

$$\hat{M}_{rr} = -D \left( \frac{1}{\hat{r}} \frac{d(\hat{w} - \hat{w}_0)}{d\hat{r}} + \nu \frac{d^2(\hat{w} - \hat{w}_0)}{d\hat{r}^2} \right) \quad (8)$$

היכן ש  $D = Ed / (12(1 - \nu^2))$  - מייצג את הקשיחות לכפיפה.

פתרון אנליטי למשוואות (8)-(1) אפשרי רק למקרים מיוחדים תחת העמסה "מכנית" ועבור פלטה שטוחה  $\hat{w}_0 = 0$ . אי לכך יש צורך במודל מקובץ (RO), גישה נפוצה ב-MEMS היות והמודל המתקבל קומפקטי יחסית למודל אלמנט סופי מלא, היכול להיות יקר חישובית ולהוות אתגר בהכללה לעומס אלקטרוסטטי.

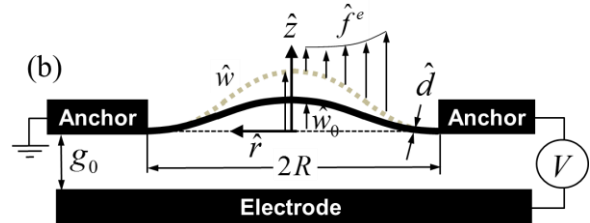
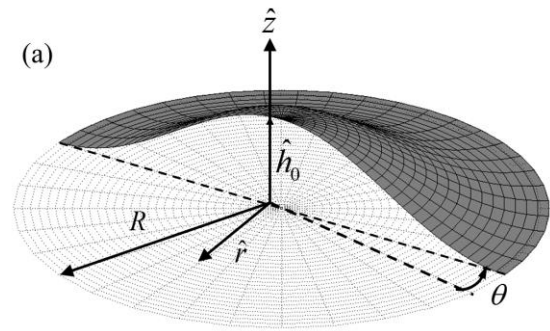
טבלה 1: גדלים חסרי ממד.

|   |                    |
|---|--------------------|
| $r = \hat{r}/R$                             | קואורדינטה רדיאלית |
| $u = \hat{u}/R$                             | הזזה רדיאלית       |
| $w = \hat{w}/g_0$                           | תצורת הפלטה        |
| $w_0 = \hat{w}_0/g_0$                       | תצורה התחלתית      |
| $h_0 = \hat{h}_0/g_0$                       | עקמומיות התחלתית   |
| $d = \hat{d}/g_0$                           | עובי הפלטה         |
| $\alpha = g_0/R$                            | פרמטר גיאומטרי     |
| $\gamma = R^2 Ed / (D(1 - \nu^2))$          | פרמטר לכוח ממברנה  |
| $N_{ij} = (R^2/D) \hat{N}_{ij}$             | כוח נורמלי/גזירה   |
| $M_{ij} = (R^2/(Dg_0)) \hat{M}_{ij}$        | מומנט              |
| $\beta = (\epsilon_0 V^2 R^4) / (2g_0^3 D)$ | פרמטר מתח          |
| $\beta^M = qR^4 / (g_0 D)$                  | פרמטר עומס "מכני"  |

עם זאת, מודל מקובץ מאפשר תיכון, מידול, חקירה פרמטרית ומחקרי היתכנות באופן פשוט יותר. מפתח סיבות אלה, מודל מקובץ על בסיס שיטת Galerkin פותח באופן אל-ממדי בהתאם לטבלה 1. הצורה של הפלטה ניתנת לייצוג על ידי (מוסכמת הסכימה בתוקף)

$$w(r) \approx q_i \Phi_i(r) \quad u(r) \approx p_i H_i(r) \quad (9)$$

היכן ש  $i = 1..n$  מייצג את מספר המוד/דרגת החופש ו-  $q_i, p_i$  מייצגים את הקואורדינטה המוכללת של ההזזה האנכית והרדיאלית, בהתאמה. פונקציות הבסיס  $\Phi_i(r), H_i(r)$  מייצגות פונקציות עצמיות (מודים של קריסה) עבור פלטה מעגלית שטוחה, המנורמלים כך ש-  $\text{Max}_{r \in [0,1]}(\Phi_i(r)) = 1, \text{Max}_{r \in [0,1]}(H_i(r)) = 1$ . את הצורה ההתחלתית אנו מייצגים על ידי  $w_0 = q_{0i} \Phi_i(r)$ . הצבה של משוואה (9) עם משוואות (8)-(5) בגרסאות האל



איור 1: מודל פלטה עקומה (a) גאומטריה וכיווני הצירים. (b) הקו השחור מייצג את הצורה ההתחלתית, הקו המקווקו האפור את הצורה הנוצרת מכוח חיובי.

$$\frac{d}{d\hat{r}}(\hat{r}\hat{N}_{rr}) - \hat{N}_{\theta\theta} = 0 \quad (1)$$

$$-\frac{1}{\hat{r}} \left( \frac{d^2}{d\hat{r}^2}(\hat{r}\hat{M}_{rr}) \frac{d\hat{M}_{\theta\theta}}{d\hat{r}} \right) = \frac{1}{\hat{r}} \frac{d}{d\hat{r}} \left( \hat{r}\hat{N}_{rr} \frac{d\hat{w}}{d\hat{r}} \right) - \frac{\epsilon_0 V^2}{2(g_0 + \hat{w})^2} \quad (2)$$

עם תנאי השפה

$$\hat{u} = \hat{w} = 0, \quad \frac{d\hat{w}}{d\hat{r}} = 0 \quad @ \quad \hat{r} = R \quad (3)$$

$$\hat{u} = 0, \quad \frac{d\hat{w}}{d\hat{r}} = 0 \quad @ \quad \hat{r} = R \quad (4)$$

בנוסף  $\hat{w}$  סופי במרכז הפלטה ו-  $\hat{u}$  מייצג הזזה רדיאלית במישור הניטרלי. כמו כן,  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$  מייצג את הקבוע הדיאלקטרי של החלל החופשי ו-  $V$  את המתח בין הפלטה לאלקטרודה. כוחות הממברנה והמומנטים ניתנים לביטוי במונחים של הזזות במישור הניטרלי של הפלטה על ידי הביטויים

$$\hat{N}_{rr} = \frac{Ed}{1 - \nu^2} \left( \frac{d\hat{u}}{d\hat{r}} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{d\hat{w}}{d\hat{r}} \right)^2 - \left( \frac{d\hat{w}_0}{d\hat{r}} \right)^2 \right) + \nu \frac{\hat{u}}{\hat{r}} \right) \quad (5)$$

$$\hat{N}_{\theta\theta} = \frac{Ed}{1 - \nu^2} \left( \nu \left( \frac{d\hat{u}}{d\hat{r}} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{d\hat{w}}{d\hat{r}} \right)^2 - \left( \frac{d\hat{w}_0}{d\hat{r}} \right)^2 \right) \right) + \frac{\hat{u}}{\hat{r}} \right) \quad (6)$$

$$\hat{M}_{rr} = -D \left( \frac{d^2(\hat{w} - \hat{w}_0)}{d\hat{r}^2} + \frac{\nu}{\hat{r}} \frac{d(\hat{w} - \hat{w}_0)}{d\hat{r}} \right) \quad (7)$$

השגיאה אשר התקבלה עבור 9559 אלמנטים עמדה על 0.02%.

ממדיות של (1),(2) יניב את מערכת המשוואות המצומדות הלא ליניאריות הבאה

$$\alpha^2 (q_i q_j - q_i^{(0)} q_j^{(0)}) a_{ijk} - e_i B_{ik} = 0 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & (q_i - q_i^{(0)}) M_{ik} + \tilde{N}_{rr} q_i L_{ik} \\ & + \frac{6}{d^2} \left( \frac{2}{\alpha^2} e_i q_j S_{ijk} + (q_i q_j q_m - q_i q_j^{(0)} q_m^{(0)}) Z_{ijmk} \right) \\ & + \beta f_k = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

היכן ש-  $f_k$  מייצג את רכיבי הווקטור המוכלל של העומס ומטריצות המקדמים מוגדרות על ידי משוואות (12)-(17). האלמנטים  $f_k^E, f_k^M$  מייצגים עומס "מכני" ואלקטרוסטטי, בהתאמה. יש לציין כי עבור עומס "מכני", הפרמטר  $g_0$  נלקח כיחידת אורך שרירותית ולא משפיע על הפתרון.

$$A_{ijk} = \int_0^1 r^3 \left( \frac{1-\nu}{2} \frac{d\Phi_i}{dr} \frac{d\Phi_j}{dr} + r \frac{d\Phi_i}{dr} \frac{d^2\Phi_j}{dr^2} \right) H_k dr \quad (12)$$

$$B_{ik} = \int_0^1 r^2 \left( H_i + r \frac{dH_i}{dr} \right) \left( 4H_k + r \frac{dH_k}{dr} \right) dr \quad (13)$$

$$S_{ijk} = \int_0^1 \left( r \frac{dH_i}{dr} + \nu H_i \right) \frac{d\Phi_j}{dr} \frac{d\Phi_k}{dr} dr \quad (14)$$

$$M_{ij} = \int_0^1 r \frac{d^2\Phi_i}{dr^2} \frac{d^2\Phi_j}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi_i}{dr} \frac{d\Phi_j}{dr} dr \quad (15)$$

$$Z_{ijkm} = \int_0^1 r \frac{d\Phi_i}{dr} \frac{d\Phi_j}{dr} \frac{d\Phi_m}{dr} \frac{d\Phi_k}{dr} dr \quad (16)$$

$$f_k^E = \int_0^1 \frac{r\Phi_k}{(1+q_i\Phi_i)^2} dr \quad f_k^M = \int_0^1 r\Phi_k dr \quad (17)$$

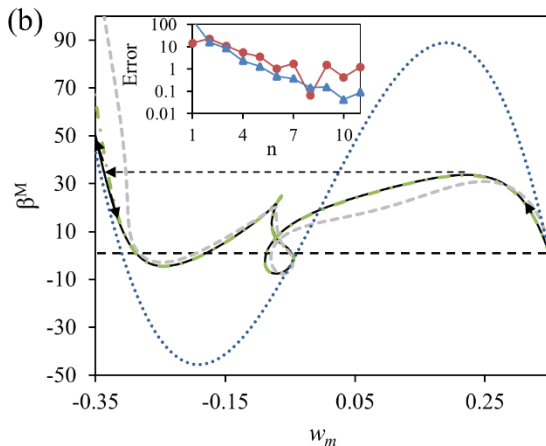
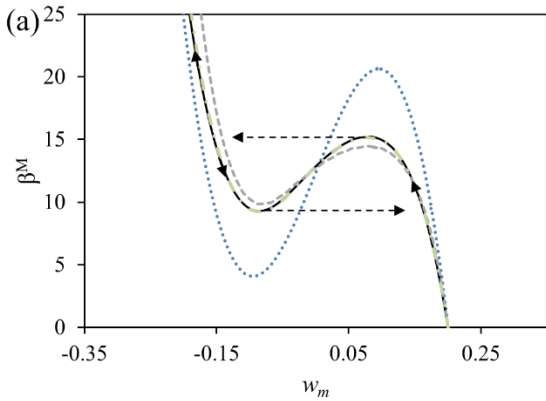
## תוצאות

בדיקת המודל המקובץ התבצעה בשלושה שלבים. ראשית, המודל הליניארי של פלטה שטוחה תחת עומס "מכני", אשר לא כולל את הצימוד בין הכפיפה למתיחה, נפתר תוך שימוש בדרגת חופש אחת ותוצאותיו נמצאו מתאימות לתוצאות המוצגות בספרות. שנית, ההתנהגות של פלטה עקומה תחת עומס "מכני" כפי שהתקבלה מהמודל הנוכחי, עם מספר משתנה של דרגות חופש,  $n$ , מ- 1 עד 11, ובעזרת שיטת ההמשכיות של Riks, השוותה לזו המתקבלת בעזרת שיטת האלמנטים הסופיים. האחרונה בוצעה באמצעות תוכנת ABAQUS, תוך שימוש באלמנטי קליפה תלת ממדיים בעלי אינטרפולציה ליניארית. על מנת לקבוע את מספר האלמנטים הדרוש לאנליזה, נבדקה התכנסות על פלטה עגולה בעלת ממדים של  $\hat{h}_0 = 3\mu\text{m}$ ,  $\hat{d} = 1\mu\text{m}$

איור 2: עקומות שיווי משקל לא מימדיות של פלטה בעלת עובי  $\hat{d} = 1\mu\text{m}$  ומקדם פואסון  $\nu = 0.3$  תחת עומס "מכני" (a)  $\hat{h}_0 = 2\mu\text{m}$  (b)  $\hat{h}_0 = 3.5\mu\text{m}$ . קווים שחורים מייצגים פתרון אלמנט סופי. קו מנוקד כחול, אפור מקווקו וקו-נקודה ירוק מייצגים מודל עם דרגת חופש אחת, שלוש ושבע דרגות חופש, בהתאמה. איור קטן ב (b) מראה את השגיאה באחוזים של נקודת ה- snap-through ביחס לאלמנט סופי אל מול מספר דרגות החופש. עיגולים אדומים ומשולשים כחולים מייצגים את השגיאה עבור המיקום והעומס, בהתאמה. חצים על גבי עקומות שיווי המשקל מייצגים את תנועת מרכז הפלטה על גבי העקומה עד ל- snap-through - release.

השוואה בין המודל המקובץ למודל האלמנט הסופי מוצגת באיור 2 עבור שתי פלטות עם עקמומיות התחלתית שונה. ניתן לראות, כי מודל דרגת חופש אחת סוטה באופן ניכר ממודל האלמנט הסופי עם שגיאות של 14.45% ו- 88.86% במיקום ובמתח נקודת ה- snap-through, בהתאמה. אולם, ככל שמספר דרגות החופש עולה, השגיאה קטנה ל- 1.23% במיקום ו- 0.09% במתח, עבור  $n = 11$ . כמו כן ניתן לראות, כי יש צורך בלפחות שלוש דרגות חופש כדי לקבל עקומת שיווי משקל המשקפת בצורה איכותית את התנהגות הפלטה.

בנוסף לזאת יש לציין, כי פתרון האלמנטים הסופיים, שלא הוגבל להיות אקסיסימטרי, ניבא שבירת סימטריה במעבר בין שני המצבים היציבים (איור 2b). למרות זאת, ההסכמה בין שני המודלים משביעת רצון. אי לכך ניתן



בנוסף לזאת יש לציין כי אבחנות אשר נעשו בעבר לגבי השפעת אופי העומס על אובדן היציבות בקורה עקומה נכונות גם עבור פלטה עגולה אקסיסימטרית. אי הלינאריות של העומס האלקטרוסטטי משפיעה בצורה ניכרת על מיקום נקודת ה-snap-through, כך שאיבוד היציבות מתרחש "מוקדם" יותר, כלומר בדפורמציה קטנה יותר, מאשר במקרה של עמיסה "מכנית".

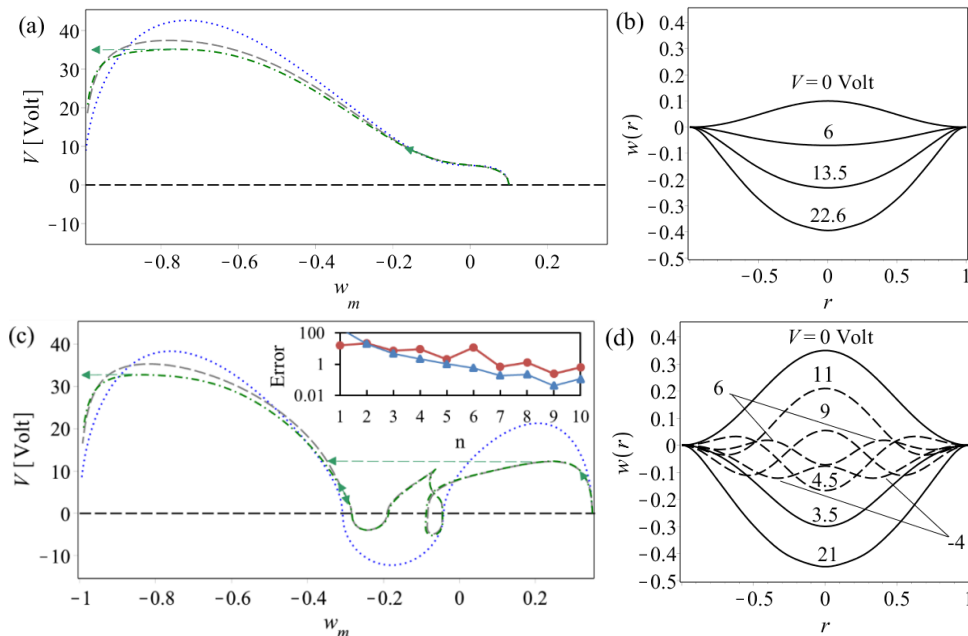
### סיכום ומסקנות

במאמר זה הצגנו מודל מקובץ קומפקטי ונוח לשימוש לתיאור ההתנהגות של פלטה עקומה תחת עומס "מכני" לא תלוי הזזות ועומס אלקטרוסטטי לא ליניארי תלוי הזזות. המודל נבדק עבור שני סוגי העומס, מול תוצאות פרטיות קיימות בספרות, מול תוצאות של ניתוח נומרי ישיר ובאמצעות בדיקת התכנסות. נמצא כי דרושות לפחות שלוש דרגות חופש על מנת לקבל ניבוי איכותי של עקומת שיווי המשקל. מספר דרגות החופש הנחוץ כדי לחזות בדיוק משביע רצון את מיקום נקודת ה-snap-through, גדל עם הגידול בעקמומיות ההתחלתית של הפלטה. כמו כן, בכדי לעקוב אחרי המסלול המפותל של עקומת שיווי המשקל, יש להשתמש בשיטת המשכיות של Riks. התוצאות מעידות כי אפשר לקבל התנהגות דו-יציבה של פלטות בעלות ממדים ריאליים באמצעות מתחים קטנים יחסית וכמו בקורות עקומות, אי הלינאריות של העומס האלקטרוסטטי "מזרזת" את ה-snap-through, כלומר גורמת להופעתו במצב של דפורמציות קטנות יותר מאשר תחת עומס "מכני".

להסיק, כי עבור פלטות המאופיינות בגיאומטריה כדוגמת אלו שנתחו, הענפים היציבים של עקומת שיווי המשקל מייצגים תגובה אקסיסימטרית.

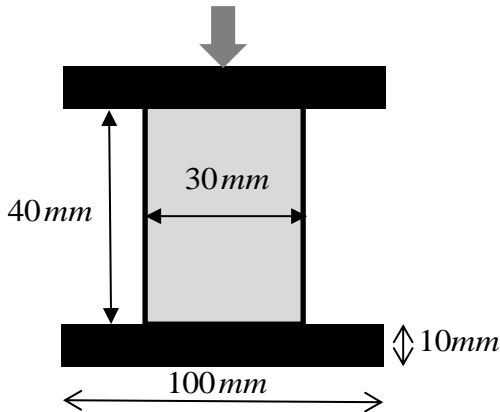
עם אישוש המודל עבור פלטה עקומה תחת עומס "מכני", נבדקה התאמתו בתנאים של עומס אלקטרוסטטי. ראשית נבדקה התנהגות ה-pull-in של פלטה שטוחה בעזרת השוואה לתוצאות המוצגות בספרות. עבור פלטה בעלת  $\hat{d} = 1\mu\text{m}$ ,  $\nu = 0.25$ , הנוכחיים שבע דרגות חופש, נקודת ה-pull-in הסוטה ב-0.02% במיקומה וב-0.15% במתח מהתוצאה הנומרית של Wang [8]. הסטייה מתוצאת המודל המקובץ של Batra [9] הייתה 0.94% במיקום וב-0.01% במתח.

עבור המקרה של פלטה עקומה תחת עומס אלקטרוסטטי, נבדקה התכנסות הפתרון מול תוצאות המודל עם 11 דרגות חופש. שלוש עקומות, עבור מודל בעל דרגת חופש אחת, שלוש ושבע דרגות חופש מוצגות באיור 3. התוצאה מראה כי יש הבדל גדול בין מודל דרגת חופש אחת לשאר דרגות החופש, עם שגיאות של 16.33% ו-198.24% עבור המיקום והמתח בנקודת ה-snap-through, בהתאמה. אולם, עם הגדלת מספר דרגות החופש, השגיאה יורדת ל-7.11% ו-4.81% עבור מיקום ומתח ה-snap-through במודל עם שבע דרגות חופש. כמו כן ניתן לראות כי כמו בתנאי עמיסה "מכניים", גם תחת העומס האלקטרוסטטי דרושות לפחות שלוש דרגות חופש כדי לקבל הערכה איכותית של עקומת שיווי המשקל. דרגת חופש אחת יכולה להספיק עבור פלטות בעלות עקמומיות נמוכה מאוד. עם הגדלת העקמומיות, יש להגדיל את מספר דרגות החופש בהתאם.



איור 3: עקומות שיווי משקל והצורה המעוותת של פלטות בעלות  $\hat{d} = 1\mu\text{m}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $g_0 = 10\mu\text{m}$ ,  $R = 1000\mu\text{m}$  ושני גבהים שונים (a)(b)  $\hat{h}_0 = 2\mu\text{m}$  (c)(d)  $\hat{h}_0 = 3.5\mu\text{m}$ . המספרים ליד הצורה המעוותת מציינים את המתח המתאים, קווים מקווקים מייצגים צורות לא יציבות. קווים שחורים מייצגים פתרון אלמנט סופי. קו מנוקד כחול, אפור מקווקו וקו-נקודה ירוק מייצגים מודל עם דרגת חופש אחת, שלוש ושבע דרגות חופש, בהתאמה. איור קטן ב (c) מראה את השגיאה באחוזים של נקודת ה-snap-through ביחס ל-11 דרגות חופש אל מול מספר דרגת החופש. עיגולים אדומים ומשולשים כחולים מייצגים את השגיאה עבור המיקום והעומס, בהתאמה. חצים על גבי עקומות שיווי המשקל מייצגים את תנועת מרכז הפלטה על גבי העקומה עד ל-snap-through, pull-in ו-release. קו מקווקו מייצג  $V = 0$ .

נתון גליל אלומיניום בממדים המתוארים באיור שלמטה.



הגליל נדחס בין שני מקבים עד לרידוקציה של 70% בגובה. ניתן להניח שהמקבים הם קשיחים לחלוטין. המקב העליון נע במהירות קבועה של 5 mm/sec. טמפרטורת המקבים בתחילת הפחיסה היא טמפרטורת החדר  $T=25^{\circ}\text{C}$  בעוד שטמפרטורת הגליל היא  $T=350^{\circ}\text{C}$ . הגליל חשוף להסעה לסביבה עם מקדם הסעה של  $h=10 \text{ W/m}^2\text{C}$ . ניתן להניח שהתנגדות המגע התרמי בין המקבים לגליל זניחה.

ניתן להניח שהאלומיניום נכנע על פי קריטריון  $J_2$  וניתן להניח חוק זרימה מהסוג:

$$\sigma(\varepsilon_p, T) = C \cdot \varepsilon_p^n$$

כאשר  $n, C$  הם קבועי מודל תלויי טמפרטורה ומופיעים בטבלה הבאה:

| n     | C [MPa] | טמפרטורה [C] |
|-------|---------|--------------|
| 0.304 | 173     | 25           |
| 0.3   | 123     | 150          |
| 0.25  | 82      | 250          |
| 0.2   | 51      | 350          |
| 0.15  | 29      | 450          |
| 0.11  | 14      | 540          |

התכונות התרמיות והפיסיקאליות של האלומיניום ופלטות הלחיצה הינן:

$$k_{Al} = 200 [W / mC], C_p^{Al} = 900 [J / KgC],$$

$$\rho_{Al} = 2700 [Kg / m^3]$$

$$k_{st} = 54 [W / mC], C_p^{st} = 460 [J / KgC]$$

$$\rho_{st} = 7800 [Kg / m^3]$$

ניתן להניח כי מקדם החיכוך קבוע וערכו  $\mu = 0.3$ .

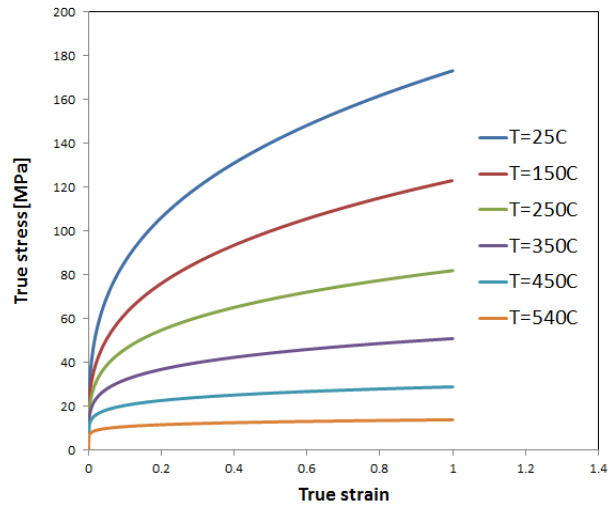
תודות לרמי אליאסי אשר עזר באנליזת האלמנט הסופי. המחקר נתמך על ידי אוניברסיטת אריאל ומשרד המדע, הטכנולוגיה והחלל.

**מראי מקום**

[1] G. J. Simitses, D. H. Hodges, Fundamentals of Structural Stability, Butterworth-Heinemann, 2006.  
 [2] N. Hu, R. Burgueo, Buckling-induced smart applications: recent advances and trends, Smart Materials and Structures 24 (2015) 1–20.  
 [3] Y. Zhu, J. W. Zu, Enhanced buckled-beam piezoelectric energy harvesting using midpoint magnetic force, Applied Physics Letters 103 (2013) 041905.  
 [4] Y.-L. Pi, M. A. Bradford, Nonlinear dynamic buckling of pinned-fixed shallow arches under a sudden central concentrated load, Nonlinear Dynamics (2013) 1–18.  
 [5] N. Akkas, G. Odeh, A novel snap-through buckling behavior of axisymmetric shallow shells with possible application in transducer design, Computers and Structures 79, (2001) 2579–2585.  
 [6] M. Sabzikar Boroujerdy, M. R. M.R. Eslami, Axisymmetric snap-through behavior of piezo-fgm shallow clamped spherical shells under thermo-electro-mechanical loading, International Journal of Pressure Vessels and Piping 120-121 (2014) 19e26.  
 [7] J. Reddy, Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, Second Edition, Series in Systems and Control, Taylor & Francis, 2006.  
 [8] Y.-G. Wang, W.-H. Lin, X.-M. Li, Z.-J. Feng, Bending and vibration of an electrostatically actuated circular microplate in presence of casimir force, Applied Mathematical Modelling 35 (2011) 2348–2357. 15  
 [9] R. Batra, M. Porfiri, D. Spinello, Reduced-order models for microelectromechanical rectangular and circular plates incorporating the casimir force, International Journal of Solids and Structures 45

ניתן להזניח את ייצור החום כתוצאה מהדפורמציה.

באזור ניתן לראות את עקום המאמץ עיבור האמיתי המתקבל בשימוש בנתונים מטבלה 1.



עקומות זרימה עבור אלומיניום בטמפרטורות שונות

אנו מעוניינים לחשב:

- עקום כוח כנגד תזוזה.
- קוטר סופי מקסימאלי.
- פילוג עיבורים פלסטיים שקולים בסוף התהליך.
- פילוג טמפרטורה בסוף התהליך.

ניתן להשתמש בכל אסטרטגיה חישובית ובכל כלי חישובי. אך יש להראות התכנסות של הפתרון (solution verification).

בהזדמנות זו רציתי להודות לדר' נסים נאוי ראש המעבדה לפיתוח תהליכים בקמ"ג ואנשי צוות המעבדה על ביצוע הניסויים ואפיון חוק הזרימה.